Clicker Fragen

Frage 1

Wenn eine reelle Matrix einen Eigenvektor hat, so hat es unendlich viele Eigenvektoren

√ ◯ richtig

◯ falsch

Sei $u \in K^n$ einen Eigenvektor von $A \in M_{n\times n}(K)$ d.h. $\exists \lambda \in K$ mit $Au = \lambda u$. Beachte, dass für $\mu \neq 0$

$$A(\mu u) = \mu(Au) = \mu(\lambda u) = \lambda(\mu u)$$

und somit ist μu auch einen Eigenvektor $\forall \mu \in K^x$ für den gleichen Eigenwert λ.

Frage 2

Betrachte die folgende beide Aussagen:
I: Ähnliche Matrizen haben immer die gleichen Eigenwerte
II: Ähnliche Matrizen haben immer die gleichen Eigenvektoren

◯ Beide Aussagen sind richtig

√ ◯ Aussage I ist richtig und Aussage II ist falsch

◯ Aussage I ist falsch und Aussage II ist richtig

◯ Beide Aussagen sind falsch

Seien A und B ähnliche Matrizen so existiert ein $Q \in \mathrm{Gl}_n(K)$ mit $A = Q^{-1}BQ$. Sei u ein Eigenvektor von A mit Eigenvalue λ d.h. $Au = \lambda u$ so folgt

$$\left(Q^{-1}BQ\right)u = \lambda u \iff (BQ)\,u = Q(\lambda u) \iff B\,(Qu) = \lambda\,(Qu)$$

und somit ist Qu ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ. Und damit hat B die gleiche Eigenwerte wie A aber nicht unbedingt die gleiche Eigenvektoren.

Frage 3

Seien λ_1 und λ_2 verschiedene Eigenwerte von $T \in \mathrm{End}(V)$ so gilt $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$

√ ◯ richtig

◯ falsch

Sei $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$ so gilt $T(v) = \lambda_1 v$ und $T(v) = \lambda_2 v$ und daraus folgt $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$ und da die beide Eigenwerte verschieden sein, folgt $v = 0$.

Frage 4

Eine lineare Abbildung T auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V ist diagonalisierbar genau dann, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Multiplizität gleich sind.

◯ richtig

√ ◯ falsch

Diese Aussage stimmt nur wenn das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren. Sei z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ so gilt $\mathrm{char_A(X) = X^2 + 1}$ und über $\mathbb{R}$ hat dies gar keine Eigenwerte und ist somit auch nicht diagonalisierbar.

Frage 5

Sei T eine lineare Abbildung auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V, so ist der zyklischen Unterraum aufgespannt durch v der gleiche wie der zyklischen Unterraum aufgespannt durch $T(v)$.

◯ richtig

√ ◯ falsch

Sei T die Nullabbildung und $0 \neq u \in V$ so ist sicherlich

$W_u = \text{span}\{u, T(u), T^2(u), \dots\} = \text{span}\{u\} \neq W_{T(u)} = \text{span}\{T(u), T^2(u), \dots\} = \text{span}\{0\}$

Frage 6

Aus $\text{char}_A(X) := \det(A - X \cdot I_n)$ folgt $\text{char}_A(A) =$ "Nullmatrix", weil $\text{char}_A(A) = \det(A - A \cdot I_n) = \det(0_{n \times n})$

◯ richtig

√ ◯ falsch

Beachte, dass $\det(0_{n\times n}) = 0 \in \mathbb{K}$, aber mit $\text{char}_A(A)$ ist der Term gemacht, den man erhält wenn man im charakteristischen Polynom jedes X durch eine A ersetzt. Es ist also eine Linearkombination von Potenzen von A. Diese ist dann Null wenn es genau das charakteristischen Polynom ist und dies ist der Satz von Cayley-Hamilton.

Frage 7

Jede Involution hat 1 als Eigenwert

○ richtig

√ ○ falsch

Eine Involution ist definiert durch $T \in \mathrm{End}(V)$ mit $T \circ T = I_V$. Insbesondere definiert $-I_{n\times n}$ (minus die Identitätsmatrix) eine Involution auf $\mathbb{R}^n$ mit als als einziger Eigenwert -1.

Frage 8

Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und definiere $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(B^T A)$, so ist $\langle A, B\rangle$ symmetrisch.

√ ○ richtig

○ falsch

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}\left((B^T A)^T\right) = \mathrm{tr}(A^T B) = \langle B, A\rangle$$

Frage 9

Seien $\langle,\rangle_1$ und $\langle,\rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf V so gilt

$$\langle v, w\rangle_1 = \langle v, w\rangle_2 \iff v = w$$

○ richtig

√ ○ falsch

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\langle,\rangle_2$ das Standardskalarprodukt, so gilt $\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\rangle_2 = 0$. Definiere nun $\langle v, w\rangle_1 := v_1w_1 + 2v_2w_2$ und überprüfen Sie selber dass dies in der Tat ein Skalarprodukt definiert. Es ist nun schnell gesehen, dass $\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\rangle_1 = 1 - 2 \neq 0$.

Frage 10

Seien $(V, \langle , \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und S eine orthogonale Menge, deren Elemente paarweise verschieden und nicht-null sind. Dann ist S linear unabhängig.

√ ◯ stimmt

◯ stimmt nicht

Dies ist Korollar 2 aus Abschnitt §6.2

Frage 11

Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein endl.dim.Eukl.Vektorraum und g ein Element im Dualraum, so existiert ein eindeutiges $v \in V$, so dass

$$g(u) = \langle u, v \rangle \forall u \in V$$

√ ◯ stimmt

◯ stimmt nicht

Dies ist die Herzlein-Aufgabe 6a aus der Serie 4

Frage 12

Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein endl.dim.Eukl.Vektorraum und $T, S \in \mathrm{End}(V)$. Welche der folgenden Behauptungen stimmt / stimmen?

√ ◯ $(T + S)^* = T^* + S^*$

◯ $(T \circ S)^* = T^* \circ S^*$

√ ◯ $(T^*)^* = T$

√ ◯ $I^* = I$

Wir wissen, dass $[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^T$. Zusammen mit der Isomorphie zwischen Endomorphismen und quadratischen Matrizen, folgen die Aussagen i), iii) und iv) sofort. Zusätzlich gilt

$$[(T \circ S)^*]_{\mathcal{B}} = [T \circ S]_{\mathcal{B}}^T = ([T]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}})^T = [S]_{\mathcal{B}}^T[T]_{\mathcal{B}}^T = [S^*]_{\mathcal{B}}[T^*]_{\mathcal{B}}$$

und daraus folgt $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Da die Matrizenmultiplikation in der Regel nicht kommutativ ist, ist das Resultat ii) im Allgemeinen falsch.

Frage 13

Betrachte die Menge

$$O(n) := \{Q \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \,|\, QQ^T = Q^TQ = I_n\}$$

Welche Aussagen sind richtig?

√ ◯ $I_n \in O(n)$

√ ◯ $Q \in O(n) \implies Q^{-1} \in O(n)$

√ ◯ $Q_1, Q_2 \in O(n) \implies Q_1Q_2 \in O(n)$

i) ist klar; ii) wenn $Q \in O(n)$ so gilt $Q^{-1} = Q^T$ und offensichtlich gilt $Q^T \in O(n)$; iii) es gilt

$$(Q_1Q_2)^T(Q_1Q_2) = Q_2^TQ_1^TQ_1Q_2 = Q_2^TQ_2 = I_n$$

und analog $(Q_1Q_2)(Q_1Q_2)^T = I_n$.

Frage 14

Sei $(V, \langle,\rangle) = (\mathbb{R}^2, \langle,\rangle_{stand})$ und $T \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$T(x, y) = (2x - 2y, -2x - 5y)$$

√ ◯ so ist T selbstadjungiert

◯ so ist T nicht selbstadjungiert

Beachte, dass $[T]_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ symmetrisch ist. Nun ist jede symmetrische Matrix ähnlich (sogar orthogonal äquivalent) zu einer Diagonalmatrix und damit existiert eine ONB aus Eigenvektoren. Das Korollar zum Hauptachsentransformation sagt nun, dass in diesem Fall T selbstadjungiert ist.

Frage 15

Seien S und T zwei selbstadjungierte Abbildungen auf dem endl.dim.Eukl.Vektorraum V so ist auch die Komposition $T \circ S$ selbstadjungiert.

◯ richtig

√ ◯ falsch

Beachte, dass für eine ONB $\mathcal{B}$ für T und S gilt

$$[(T \circ S)^*]_{\mathcal{B}} = [(T \circ S)]_{\mathcal{B}}^T = ([T]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}})^T = [S]_{\mathcal{B}}^T[T]_{\mathcal{B}}^T = [S]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = [S \circ T]_{\mathcal{B}}$$

aber damit haben wir gezeigt, dass $(T \circ S)^* = S \circ T$ und dass ist nicht die Definition von selbstadjungiert (dazu müssten die Darstellungsmatrizen von T und S noch kommutieren).

Frage 16

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, so gilt $\dim(\mathrm{BF}(V)) = n^2$.

$\surd$ ◯ stimmt

◯ stimmt nicht

Theorem 2 in §7.1 zeigt dass $\mathrm{BF}(V)$ isomorph ist zu $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und damit ist die Dimension vom ersten Vektorraum gleich zu der vom zweiten, und die ist n^2

Frage 17

Seien A und B zwei kongruente Matrizen, so haben sie die gleichen Eigenwerte.

◯ richtig

$\surd$ ◯ falsch

Betrachte das folgende Beispiel

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B := Q^T A Q$$

so ist $Q \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$, also sind A und B kongruent, aber $\sigma(A) = \{1,1\}$ und $\sigma(B) = \{4,4\}$

Frage 18

Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein endl.dim.Eukl.Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine ONB und $T \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt T ist orthogonal genau dann wenn $[T]_\mathcal{B}$ orthogonal ist.

$\surd$ ◯ richtig

◯ falsch

"$\Rightarrow$" Beachte, dass

$$\left([T]_\mathcal{B}^T [T]_\mathcal{B}\right)_{i,j} = \langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$$

und somit ist $[T]_\mathcal{B}$ orthogonal.
"$\Leftarrow$" Es gilt, mit $\langle u, v\rangle = [u]_\mathcal{B}^T A [v]_\mathcal{B}$

$$\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, T^*Tv\rangle = [u]_\mathcal{B}^T A [T^*Tv]_\mathcal{B} = [u]_\mathcal{B}^T A [T]_\mathcal{B}^T [T]_\mathcal{B} [v]_\mathcal{B} = [u]_\mathcal{B}^T A [v]_\mathcal{B} = \langle u, v\rangle$$

und somit ist die Abbildung T orthogonal. In diesem Beweis ist es wichtig, dass $\mathcal{B}$ nicht irgendeine Basis ist, sondern eine ONB – sehen Sie wieso?

Frage 19

◯

$\surd$ ◯