Proposition. *Je zwei ähnliche Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$ haben dasselbe charakteristische Polynom.*

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $T \in \operatorname{End}(V)$ und λ_j ein Eigenwert von T. Setze*

$$E_{\lambda_j} := \{u \in V \mid T(u) = \lambda_j u\} = \operatorname{Ker}(T - \lambda_j I_V).$$

Wir nennen E_{λ_j} den Eigenraum *von T zum Eigenwert λ_j und $\dim(E_{\lambda_j})$ die* geometrische Multiplizität *von λ_j.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $T \in \operatorname{End}(V)$, sodass $\operatorname{char}_T(X)$ über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T. Dann gilt:*

1) T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ für alle $1 \leq j \leq k$ gilt $m_j = \dim(E_{\lambda_j}) \Leftrightarrow V = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$.

2) Wenn T diagonalisierbar ist und für jedes $1 \leq i \leq k$ die Menge $S_i \subset E_{\lambda_i}$ eine Basis von E_{λ_i} ist, dann ist $S := S_1 \cup \cdots \cup S_k$ eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von T.

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}$. Wenn $W \subset V$ ein T-invarianter Unterraum ist, so teilt das Polynom $\operatorname{char}_{T_W}(X)$ das Polynom $\operatorname{char}_T(X)$ in $\mathbb{K}[X]$.*

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}(V)$. Sei $u \in V \setminus \{0\}$ und $W := \operatorname{span}\big(\{T^l(u) \mid l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\big)$. Sei $k := \dim W$. Dann gelten*

i) $k \geq 0$ und $\{T^l(u) \mid 0 \leq l < k\}$ ist eine Basis von W.

ii) Seien $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$, sodass $T^k(u) = -a_0 u - \cdots - a_{k-1} T^{k-1}(u)$, dann ist

$$\operatorname{char}_{T_W}(X) = (-1)^k (a_0 + a_1 X + \cdots + a_{k-1} X^{k-1} + X^k).$$

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \in \operatorname{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $\operatorname{char}_T(X)$. Dann gilt $\operatorname{char}_T(T) = 0$ in $\operatorname{End}(V)$.*

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $T \in \operatorname{End}(V)$ heisst*

i) Involution, *falls $T \circ T = I_V$.*

ii) Projektion, *falls $T \circ T = T$.*

iii) nilpotent, *falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $T^k = 0$.*

Proposition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, in welchem $2 \neq 0$ ist. Sei $T \in \operatorname{End}(V)$ eine Involution. Dann sind alle Eigenwerte von T in $\{\pm 1\}$ und $V = E_1 \oplus E_{-1}$. Insbesondere ist T diagonalisierbar.*

Proposition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $P \in \operatorname{End}(V)$ eine Projektion. Dann gelten*

i) Die Eigenwerte von P liegen in $\{0, 1\}$ und $V = \operatorname{Ker}(P) \oplus E_1$. Insbesondere ist P diagonalisierbar und $E_1 = \operatorname{Im}(P)$.

ii) Sei $P^\perp := I_V - P$, dann ist $P^\perp \circ P^\perp = P^\perp$. Es ist $\operatorname{Ker}(P^\perp) = \operatorname{Im}(P)$ und $\operatorname{Im}(P^\perp) = \operatorname{Ker}(P)$.

Theorem. *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, dann gelten für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:*

i) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$,

ii) $\|u\| \geq 0$ und $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

iii) (Cauchy-Schwarz Ungleichung) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ und

iv) (Dreiecksungleichung) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Theorem. *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, und sei $S = (v_1, \ldots, v_k)$ eine geordnete, orthogonale Teilmenge von V und sei $0 \notin S$. Falls $w = \sum_{i=1}^k a_i v_i$ für Skalare $a_i \in \mathbb{R}$, dann gilt*

$$a_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \quad (1 \leq i \leq k).$$

Theorem. *Sei V ein Euklidischer Vektorraum und $S = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete, linear unabhängige Teilmenge von V. Definiere*

$$w_1 = v_1 \quad \text{und} \quad w_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j \quad (2 \leq k \leq n).$$

Dann ist $\tilde{S} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine geordnete orthogonale Teilmenge von V, deren Elemente alle von 0 verschieden sind, und die $\operatorname{span}(S) = \operatorname{span}(\tilde{S})$ erfüllt.

Korollar. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine ONB von* V *und sei* $T \in \mathrm{End}(V)$*. Sei* $A = [T]_{\mathcal{B}}$*, dann gilt* $A_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle$, $(1 \leq i, j \leq \dim V)$.

Korollar. *Sei* $(v_1, \ldots, v_k)$ *eine geordnete orthonormale Teilmenge eines Euklidischen Vektorraums* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*. Seien* $W = \mathrm{span}(\{v_1, \ldots, v_k\}) \subset V$ *und* $y \in V$*. Der Vektor* $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{k} \langle v, v_i\rangle v_i$ *ist das eindeutige Element in* W *mit den Eigenschaften*

i) $y - \tilde{y} \in W^{\perp}$,

ii) $\forall w \in W : \|y - \tilde{y}\| \leq \|y - w\|$.

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Dann ist die Abbildung* $\Phi : V \to V^*$, $v \mapsto \Phi_v$ *mit* $\Phi_v(u) = \langle u, v\rangle$ *für alle* $u \in V$ *ein Isomorphismus mit Inverse* $\Phi^{-1} : V^* \to V$ *gegeben wie folgt: Sei* $f \in V^*$*, dann ist* $\Phi^{-1}(f) \in V$ *der eindeutig bestimmte Vektor in* V*, der für alle* $u \in V$ *die Gleichung* $\langle u, \Phi^{-1}(f)\rangle = f(u)$ *erfüllt.*

Theorem. *Seien* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ *und* $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ *endlichdimensionale Euklidische Vektorräume. Seien* $\mathcal{B}$*,* $\mathcal{C}$ *geordnete orthonormale Basen von* V *bzw. von* W *und sei* $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$*. Dann gilt*

$$[T^*]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^T.$$

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum und sei* $T \in \mathrm{End}(V)$ *selbstadjungiert. Dann existiert eine geordnete Orthonormalbasis von* V*, deren Elemente alles Eigenvektoren von* T *sind.*

Theorem. *Sei* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *symmetrisch, dann existiert eine orthogonale Matrix* $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*, sodass*

$$D = Q^{-1}AQ = Q^T AQ$$

eine Diagonalmatrix ist.

Theorem. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Sei* $T \in \mathrm{End}(V)$*. Folgende sind äquivalent:*

i) $\forall u, v \in V : \langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$.

ii) $TT^* = T^*T = I_V$.

iii) Sei $\mathcal{B}$ *eine ONB von* V*, dann ist* $T(\mathcal{B})$ *eine ONB von* V*.*

iv) Es existiert eine ONB $\mathcal{B}$ *von* V*, sodass* $T(\mathcal{B})$ *eine ONB von* V *ist.*

v) T *ist eine* Isometrie, *d.h.* $\forall u, v \in V : \|Tu - Tv\| = \|u - v\|$.

Korollar. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei* $T \in \mathrm{End}(V)$*. Folgende sind äquivalent:*

i) V *besitzt eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von* T *zu Eigenwerten, deren Absolutbetrag allesamt gleich* 1 *ist.*

ii) T *ist selbstadjungiert und orthogonal.*

Definition. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, und sei* $\beta \in \mathrm{BF}(V)$*. Die* Darstellungsmatrix *von* β *bezüglich einer geordneten Basis* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *von* V *ist die Matrix* $A = [\beta]_{\mathcal{B}} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *gegeben durch*

$$A_{ij} = \beta(v_i, v_j) \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Theorem. *Sei* V *ein endlichdimensionaler Vektorraum mit geordneten Basen* $\mathcal{B}$ *und* $\tilde{\mathcal{B}}$*, sei* Q *die Basiswechselmatrix von* $\tilde{\mathcal{B}}$*- zu* $\mathcal{B}$*-Koordinaten und sei* $\beta \in \mathrm{BF}(V)$*. Dann gilt*

$$[\beta]_{\tilde{\mathcal{B}}} = Q^T[\beta]_{\mathcal{B}}Q.$$

Insbesondere sind $[\beta]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ *und* $[\beta]_{\mathcal{B}}$ *kongruent.*

Theorem. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und sei* $2 \neq 0$ *in* $\mathbb{K}$*. Dann ist jede symmetrische Bilinearform auf* V *diagonalisierbar.*

Theorem. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper in welchem* $2 \neq 0$ *gilt. Sei* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *symmetrisch. Dann ist* A *kongruent zu einer Diagonalmatrix.*

Definition. *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper. Eine Abbildung* $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *ist eine quadratische Form (über* $\mathbb{K}$*) in* n *Variablen, wenn eine symmetrische Matrix* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *existiert, sodass*

$$Q(v) = v^T Av \quad (v \in \mathbb{K}^n).$$

Theorem. *Sei* Q *eine quadratische Form auf* $\mathbb{R}^n$*. So gilt:*

i) Es existiert eine ONB $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ von $\mathbb{R}^n$ für das standard innere Produkt, es gibt $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+q} > 0$, sodass $p + q \leq n$ und

$$Q(v) = \lambda_1 a_1^2 + \cdots + \lambda_p a_p^2 - \lambda_{p+1} a_{p+1}^2 - \cdots - \lambda_{p+q} a_{p+q}^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelten, wobei $v = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$.

ii) Es existiert eine orthogonale Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ für das standard innere Produkt, es gibt $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sodass $p + q \leq n$ und

$$Q(v) = \tilde{a}_1^2 + \cdots + \tilde{a}_p^2 - \tilde{a}_{p+1}^2 - \cdots - \tilde{a}_{p+q}^2$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gelten, wobei $v = \tilde{a}_1 v_1 + \cdots + \tilde{a}_n v_n$.

Falls $p + q = n$, dann heisst das Tupel (p, q) Typus *von Q.*

Theorem. *Sei β eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen, endlichdimensionalen Vektorraum V, so ist die Anzahl der positiven und der negativen Einträge in irgendeiner Diagonalmatrixdarstellung invariant.*

Korollar. *Zwei symmetrische, reelle Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sind genau dann kongruent, wenn $\sigma(A) = \sigma(B)$ gilt.*

Theorem. *Für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ mit $r = \operatorname{Rang}(A)$ existieren Matrizen $Q \in O(n)$, $R \in O(m)$ sowie eine Matrix $D \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ der Form*

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, sodass $A = RDQ^T$ gilt.

Definition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \operatorname{End}(V)$. T ist eine* Rotation, *falls entweder $T = I_V$ oder falls ein 2-dimensionaler Unterraum $W \subset V$ mit einer ONB (v_1, v_2) von W sowie ein $\theta \in \mathbb{R}$ existieren, sodass*

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \cos\theta v_1 + \sin\theta v_2 \\ T(v_2) &= -\sin\theta v_1 + \cos\theta v_2 \end{aligned}$$

und $T(v) = v$ für alle $v \in W^\perp$ gelten. T ist eine Rotation um $W^\perp$, bzw. $W^\perp$ ist die Rotationsachse *von T.*

Definition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \operatorname{End}(V)$. T ist eine* Reflexion, *falls ein 1-dimensionaler Unterraum $W \subset V$ existiert, sodass $T(w) = -w$ für alle $w \in W$ und $T(v) = v$ für alle $v \in W^\perp$ gelten. T ist eine Reflexion von V in W.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, sei $T \in \operatorname{End}(V)$ und seien $W_1, \dots, W_m$ paarweise orthogonale, T-invariante Unterräume von V der Dimensionen 1 oder 2. sodass $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.*

i) Die Anzahl der Unterräume W_i für welche $T|_{W_i}$ eine Rotation bzw. eine Reflexion ist, ist gerade oder ungerade abhängig davon, ob $\det T = 1$ oder $\det T = -1$.

ii) Es ist immer möglich V so zu zerlegen, dass die Anzahl der W_i für welche $T|_{W_i}$ eine Reflexion ist, gleich 1 oder 0 ist und zudem, falls T_{W_i} eine Reflexion ist, $\dim W_i = 1$ gilt.

Korollar. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum, $T \in \operatorname{End}(V)$ orthogonal. Es existieren $T_1, \dots, T_m \in \operatorname{End}(V)$ orthogonal, sodass gelten:*

i) Für alle $1 \leq i \leq m$ ist T_i ist entweder eine Reflexion oder eine Rotation.

ii) Es existiert maximal ein i, sodass T_i eine Reflexion ist.

iii) Für alle $1 \leq i, j \leq m$ gilt $T_i T_j = T_j T_i$.

iv) $T = T_1 \cdots T_m$.

v) Es ist

$$\det(T) = \begin{cases} 1 & \text{falls } T_i \text{ eine Rotation ist für alle } 1 \leq i \leq m \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Theorem. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \operatorname{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von T. Dann gelten*

i) $K_\lambda \subset V$ ist ein T-invarianter Unterraum und $E_\lambda \subset K_\lambda$.

ii) Für alle $\mu \neq \lambda$ ist $(T - \mu I_V)|_{K_\lambda}$ injektiv.

Theorem. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\mathrm{char}_T(X)$ zerfalle in Linearfaktoren. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T mit algebraischen Multiplizitäten $m_1, \dots, m_k$. Seien $\mathcal{B}_i$ Basen von K_{λ_i}, so gelten*

i) $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ *wenn* $i \neq j$,

ii) $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ *ist eine Basis von* V,

iii) $\dim K_{\lambda_i} = m_i$ *für alle* $1 \leq i \leq k$.

Definition. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und sei $v \in V \setminus \{0\}$ ein Hauptvektor zum Eigenwert λ. Sei $p \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft $(T - \lambda I_V)^p(v) = 0$. Die geordnete Menge*

$$((T - \lambda I_V)^{p-1}(v), \dots, (T - \lambda I_V)(v), v)$$

heisst Zyklus *des Hauptvektors v von T zum Eigenwert λ. Dieser Zyklus hat* Länge *p.*

Korollar. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, dann ist $\exp(A) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ und $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum. Dann gelten*

- *(Cauchy-Schwarz Ungleichung) Für alle $v, w \in V$ ist $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.*
- *Die Abbildung $v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ ist eine Norm auf V.*
- *Seien $v, w \in V$, dann ist $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ genau dann, wenn $v = \lambda w$ für ein $\lambda \in [0, \infty)$.*

Proposition. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum mit einer ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, dann ist*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, v\rangle v_i \quad (v \in V).$$

Proposition. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ unitäre Vektorräume. Seien $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$.*

- *Wenn T^* existiert, dann existiert auch $(T^*)^*$ und es gilt $(T^*)^* = T$.*
- *Falls T^* existiert und $\dim V < \infty$, dann gilt für jede ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, dass*

$$T^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v_i), w\rangle_W v_i \quad (w \in W).$$

- *Seien V, W endlichdimensional und seien $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ ONB von V, W. Dann ist*

$$[T^*]^{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathcal{B}}} = ([T]^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mathcal{B}})^*.$$

- *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, dann ist $(L_A)^* = L_{A^*}$.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sei T selbstadjungiert.*

i) Alle Eigenwerte von T sind reell.

ii) Falls $\dim V < \infty$, dann existiert eine ONB von V bestehend aus Eigenvektoren von T. Insbesondere ist T diagonalisierbar.

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$. Wenn $\mathrm{char}_T(X)$ in Linearfaktoren zerfällt, dann existiert eine ONB $\mathcal{B}$ von V, sodass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ normal.*

i) $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ *für alle* $v \in V$.

ii) $T - cI_V$ *ist normal für alle* $c \in I_V$.

iii) $T(v) = \lambda v \Rightarrow T^*(v) = \overline{\lambda} v$.

iv) Seien λ_1, λ_2 verschiedene Eigenwerte von T mit Eigenvektoren v_1, v_2. Dann gilt $v_1 \perp v_2$.

Theorem. *Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und sei $T \in \mathrm{End}(V)$. T ist genau dann normal, wenn eine ONB $\mathcal{B}$ von V bestehend aus Eigenvektoren von T existiert.*

Theorem. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}(V)$ unitär, so gelten:*

i) Alle Eigenwerte von T haben Betrag 1.

ii) T ist diagonalisierbar.