

Drei Fragen, wie sie im Sommer auftreten könnten

1. Rechenaufgabe

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. Anwendung der Theorie

Zeigen Sie, dass das offene Einheitsquadrat $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ und } |y| < 1\}$ diffeomorph zur offenen Einheitskreisscheibe $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ist.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Abbildung

$$h : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

ein Diffeomorphismus ist.

3. Theorie aus der Vorlesung

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Funktion.

- Definieren Sie die partiellen Ableitungen und die totale Ableitung von f .
- Zeigen Sie, dass f auf ganz U differenzierbar ist, falls die beiden partielle Ableitung $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ auf ganz U existiert und stetig sind.