

Übungsblatt 1

Bitte beachten Sie die organisatorischen Bemerkungen am Ende.

1. a) Stellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Aussage auf. Ist diese Aussage wahr?

$$((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A.$$

- b) Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Aussage um eine Tautologie handelt:

$$(A \wedge \neg A) \Rightarrow B.$$

2. Sei X eine Teilmenge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Bilden Sie die Negation folgender Aussagen, wobei Sie versuchen sollten, die Negation so weit wie möglich nach "rechts" zu schieben. (Obwohl die Aussagen eine geometrische Bedeutung haben, muss man diese weder kennen noch verstehen, um die Aufgabe zu lösen):

- a) $\forall y \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : |x - y| < \varepsilon$,
b) $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists y \in X : (y \neq x) \wedge |x - y| < \varepsilon$.

Hier ist " $\forall \varepsilon > 0 : A(\varepsilon)$ " eine Kurzform für " $\forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0 \Rightarrow A(\varepsilon)$ ". Sie können für die Negation von " $|x - y| < \varepsilon$ " auch einfach " $\neg(|x - y| < \varepsilon)$ " schreiben, doch ist dies aufgrund der Eigenschaften von \mathbb{R} äquivalent zu " $|x - y| \geq \varepsilon$ ".

3. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass dann gilt

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n - 1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}.$$

4. Betrachten Sie das Gebiet

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}.$$

Berechnen Sie mit den gleichen Methoden wie in der Vorlesung den Flächeninhalt von P . Sie dürfen dazu die Aussage von Aufgabe 3 benutzen.

Bitte wenden!

5. Auf der Insel der Ritter und Knappen ist jeder Einwohner entweder ein Ritter oder ein Knappe (und jeder kennt den Status von allen anderen Einwohnern). Es ist wichtig zu wissen, dass

- Ritter immer die Wahrheit sagen;
- Knappen immer lügen.

Sie werden auf Einwohner der Insel treffen und Ihre Aufgabe ist es, bei jedem einzelnen zu entscheiden, ob er ein Ritter oder ein Knappe ist.

- a) Sie treffen Johannes und Wilhelm auf der Insel. Johannes sagt: "Willhelm und ich sind Ritter." Wilhelm sagt: "Das ist eine Lüge, Johannes ist ein Knappe!" Was sind sie?
- b) Sie treffen Heinrich und Arthur auf der Insel. Heinrich murmelt irgend etwas unverständliches. Arthur sagt: "Heinrich sagt, er sei ein Knappe. Das ist er sicher - vertrauen Sie ihm nicht!" Was sind sie?

6. Wo liegt der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?

Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: Sei $P(n)$ die Aussage, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe aufweisen. $P(1)$ ist offensichtlich wahr. Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei und wir wollen $P(k + 1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k + 1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde, die nach Induktionsannahme also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde übrig, die dann alle die gleiche Farbe haben. Da Pferde ihre Farbe nicht ändern, muss dies dieselbe Farbe wie bei der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k + 1$ Pferde die gleiche Farbe.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 28. September 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 29. September 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.

Siehe nächstes Blatt!

Allgemeine Bemerkungen zum Übungsbetrieb:

- Elektronische Einschreibung in die Übungsgruppen: Falls Sie dies noch nicht gemacht haben, dann gehen Sie bitte nach echo.ethz.ch um Ihre Einschreibung für eine Übungsgruppe vorzunehmen. In der rechten Spalte der Einschreibung sehen Sie den Ort und Zeitpunkt der dritten Übungsstunde (= Kolloquium) am Montag oder Mittwoch.
- Die neuen Übungsaufgaben der n -ten Serie werden jeweils am Donnerstag der n -ten Woche veröffentlicht. (Heute ist $n = 1$.)
- Sie haben jeweils bis am Mittwoch der $(n + 1)$ -ten Woche um 13:00 Zeit, um sich elektronisch unter echo.ethz.ch bereit zu erklären, in der Übungsstunde am darauffolgenden Freitag eine Aufgabe vorzulösen.
- Es werden pro Aufgabe und pro Übungsgruppe zufällig drei Studenten ausgewählt, welche sich für die entsprechende Aufgabe bereit erklärt haben. (Für Aufgabe 1 und Aufgabe 2 werden jeweils nur zwei Studenten ausgewählt.)
- Falls Sie für eine Aufgabe ausgewählt wurden, erhalten Sie am Mittwoch kurz nach 13:00 eine E-Mail. Wenn Sie keine E-Mail erhalten, wurden Sie dieses Mal nicht ausgewählt.
- Die ausgewählten Studenten sind eingeladen, ihre Lösung zu überarbeiten und ihre Präsentation vorzubereiten. Die überarbeitete schriftliche Lösung muss bis am Donnerstag um 14:00 ins Fach Ihres Übungsleiters gelegt oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter abgegeben werden. Die Fächer befinden sich im HG F 27.
- In der Übungsstunde am Freitag wird pro Aufgabe einer der drei (zwei) Studierenden ausgewählt, um ihre/seine Lösung an der Wandtafel zu präsentieren. Alle anderen Studenten, insbesondere auch die beiden anderen Ausgewählten, sind herzlich eingeladen, sich einzubringen, vor allem wenn andere Lösungswege oder Ideen verwendet wurden.

Bemerkungen zur Bewertung:

- Die Mitarbeit in den Übungsstunden fließt mit einem Gewicht von 5 Prozent in die Endnote ein.
- Sie erhalten einen Punkt, wenn folgende vier Bedingungen erfüllt sind:
 - Sie haben sich elektronisch bereit erklärt eine Aufgabe vorzulösen,

Bitte wenden!

- Sie wurden für die entsprechende Aufgabe zufällig ausgewählt,
 - Sie haben rechtzeitig eine schriftliche Lösung der Aufgabe abgegeben,
 - Sie waren in der entsprechenden Übungsstunde anwesend und wären bereit gewesen, Ihre Lösung zu präsentieren.
- Ihre Note ergibt sich am Ende des Semester aus der Formel

$$\min(6.0, \max(1.0, \text{Anzahl Punkte})).$$

Um die Note 6.0 zu erhalten, müssen Sie also mindestens sechs mal im Semester ausgewählt werden.

- Die Aufgaben sind auf dem Übungsblatt nach Schwierigkeit geordnet. Sie können pro Semester nur einmal für Aufgabe 1 und maximal zweimal für Aufgabe 2 ausgewählt werden.
- Die Kapazität der Übungsaufgaben ist gross genug, sodass theoretisch alle Studierenden die Note 6.0 erhalten können, wenn sich jeder Studierende für jede Aufgabe bereit erklärt. Sie können natürlich Ihre Kollegen nicht beeinflussen, doch haben Sie ein Recht auf die Note 6.0, wenn Sie sich für alle Beispiele auf jedem Übungsblatt freiwillig melden und obige Spielregeln beachten. Wenn Sie auf dieses formale Recht verzichten und trotzdem eine 6.0 erzielen wollen, empfehlen wir Ihnen, die Statistiken der freiwilligen Meldungen auf echo.ethz.ch zu beachten und Beispiele zu lösen, die weniger freiwillige Meldungen haben.

Viel Erfolg in den Übungen,

Philipp Wirth & Manfred Einsiedler