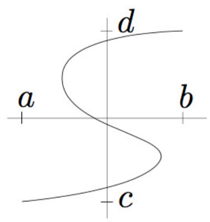
D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis I HS 2016
Prof. Manfred Einsiedler

# Übungsblatt 2

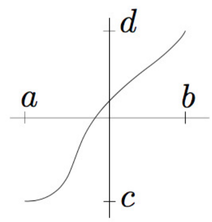
Bitte beachten Sie die organisatorischen Bemerkungen am Ende.

**1.** a) Existieren injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen von $\{0, 11, 111\}$ nach $\{0, 1\}$?

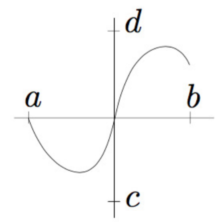
b) Sei im Folgenden $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ für reelle Zahlen $a \leq b$. Sind die folgenden Abbildungen Graphen einer Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$? Ist diese Funktion, sofern sie existiert, surjektiv, injektiv oder bijektiv?



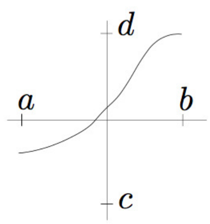

(i) Abb 1



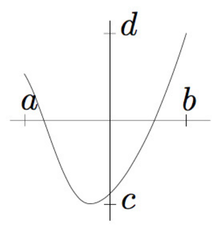

(ii) Abb 2



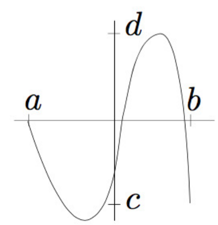

(iii) Abb 3




(iv) Abb 4




(v) Abb 5




(vi) Abb 6

**Bitte wenden!**

**2.** Seien $X, Y$ Mengen und $A, A'$ Teilmengen von $X$, $B, B'$ Teilmengen von $Y$. Zeigen Sie die Formel

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B').$$

Zeigen Sie mittels eines (Gegen-)Beispiels, dass es im Allgemeinen keine ähnliche Formel für die Vereinigung gibt.

**3.** a) Definieren Sie unter Verwendung des Existenzquantors einen neuen Quantor $\exists^{\geq 2}$, so dass für eine Aussage $A(x)$ die Aussage "$\exists^{\geq 2} x \in X : A(x)$" bedeutet, dass es mindestens zwei Elemente $x$ in $X$ gibt, die die Eigenschaft $A(x)$ haben.

b) Definieren Sie unter Verwendung des Existenzquantors, dem Funktionsbegriff, Eigenschaften von Funktionen, und der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, einen neuen Quantor $\exists^{\infty}$, der besagt, dass es unendlich viele Elemente in $X$ gibt, die die Eigenschaft besitzen.

**4.** Sei $X$ eine Menge. Für alle Teilmengen $A \subset X$ ist die *charakteristische Funktion* von $A$ definiert als $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ mit Abbildungsvorschrift

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Sei nun $\{0, 1\}^X$ die Menge der Funktionen $X \to \{0, 1\}$. Ferner bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von $X$. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung eine Bijektion ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &\to \{0, 1\}^X \\ A &\mapsto \chi_A \end{aligned}$$

**5.** Es bezeichne $X = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \ldots, 8\}\}$ die Menge der Felder eines Schachbrettes. Hierauf definieren wir die Relation $\sim$, wobei $a \sim b$ genau dann gelten soll, wenn ein Springer auf Feld $a$ auf einem sonst leeren Schachbrett das Feld $b$ in endlich vielen Zügen erreichen kann.

a) Zeigen Sie, dass $(1, 1) \sim (1, 3)$,

b) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist,

c) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $\sim$. (Analysieren Sie zuerst den Fall eines $(3 \times 3)$-Schachbrettes.)

**Siehe nächstes Blatt!**

**6.** a) Sei $X$ eine nicht endliche Menge. Zeigen Sie, dass es eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to X$ gibt. Daraus folgt sofort, dass es keine unendliche Menge gibt, deren Mächtigkeit kleiner als die von $\mathbb{N}$ ist. (Sie dürfen dafür abzählbar oft eine Wahl treffen.)

b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Funktionen $n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{N}_0$, welche die folgende Eigenschaft haben, abzählbar ist:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \,\forall\, n \geq n_0, a_n = 0.$$

(Sie dürfen hier die eindeutige Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen verwenden.)

c) Zeigen Sie, dass die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar ist.

- **Achtung: Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen. (Ausnahme: IN Phys.-Chem. Fachrichtung, siehe E-Mail.)**
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 5. Oktober 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 6. Oktober 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.