Übungsblatt 3

Definition: Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

1. Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$,

b) $|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.

2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\forall a \in \mathbb{R} \,:\, a^2 = |a|^2 = |a^2|$,

b) $\forall a, b \in \mathbb{R} \,:\, \big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b|$ und $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a + b|$.

3. Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq 0.$$

4. Für x, y in einem Körper $\mathbb{K}$ mit $y \neq 0$ definieren wir $\frac{x}{y} = xy^{-1}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ mit $y, z \neq 0$ gilt $\frac{x}{y} = \frac{xz}{yz}$,

b) Für alle $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{K}$ mit $y_1, y_2 \neq 0$ gilt $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 y_2}$,

c) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ gilt $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Bitte wenden!

5. Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie die Existenz von $\sqrt{a}$, d.h. zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl $x > 0$ gibt, welche die Gleichung $x^2 = a$ löst.

6. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\mathbb{Z}$ ist kein Körper,

b) $\mathbb{Q}$ ist ein Körper,

c) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar,

d) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,

e) $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\,\right] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Körper, siehe auch Lineare Algebra, Serie 3, Aufgabe 2.

Hinweise zu den Aufgaben:

3. Versuchen Sie, den Ausdruck als Summe von mehreren Quadraten zu schreiben.

5. Verwenden Sie das Vollständigkeitsaxiom, um zu zeigen, dass $\sqrt{a}$ existiert. Betrachten Sie dazu die Mengen $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > a \wedge x > 0\}$ und $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y^2 < a \wedge y > 0\}$.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Seien $x, y > 0$ und $z \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Implikationen sind richtig?

(a) $x > y \Rightarrow x + z > y + z$.

(b) $x > y \Rightarrow x + z \geq y + z$.

(c) $x > y \Rightarrow xz > yz$.

(d) $x > y \Rightarrow xz \geq yz$.

(e) $x \geq y \Rightarrow xz \geq yz$.

(f) Keine.

Siehe nächstes Blatt!

2. Sei X die Menge der Städte auf der Eerde. Definiere auf X die Relation

$$x \sim y \Leftrightarrow x \text{ ist von } y \text{ aus auf dem Landweg erreichbar.}$$

Diese Relation ist

(a) eine Ordnungsrelation.

(b) eine Äquivalenzrelation.

(c) Weder eine Ordnungs- noch eine Äquivalenzrelation.

3. Welche der folgenden Formeln in $\mathbb{C}$ (mit $i^2 = -1$) sind richtig?

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)^4 = 1$

(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)^4 = -1$

(c) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3 = 1$

(d) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3 = -1$

(e) Keine.

4. Wir sagen, dass $x_0 = \min(X)$ das Minimum einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist, falls $x_0 \in X$ und $x \geq x_0$ für alle $x \in X$ gilt. Welche der folgenden Mengen hat ein Minimum?

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

(c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

(d) Keine.

Bitte wenden!

5. Betrachten Sie die Menge

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid x + \frac{8}{x} + 6 \geq 0 \right\}.$$

Welche der folgenden Mengen ist gleich X?

(a) $(0, \infty) \cup [-8, -6]$.

(b) $(0, \infty) \cup [-4, -2]$.

(c) $(0, \infty) \cup (-4, -2)$.

(d) $(-\infty, -4] \cup [-2, \infty)$.

(e) $(-\infty, -4] \cup [-2, 0) \cup (0, \infty)$.

(f) Keine.

- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 14. Oktober um 8:00.
- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 12. Oktober 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 13. Oktober 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.