D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis I | HS 2016
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 4

1. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkt und nicht leer. Zeigen Sie

a) $A \subset B$ impliziert $\sup(A) \leq \sup(B)$.
b) $(\forall a \in A, \forall b \in B \ : \ a \leq b)$ impliziert $\sup(A) \leq \inf(B)$.

2. Sei A eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist A nach oben beschränkt, so ist $-A = \{-x \mid x \in A\}$ nach unten beschränkt und es gilt $\inf(-A) = -\sup(A)$.
b) Ist $\inf(A) > 0$, so ist $A^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in A\}$ nach oben beschränkt und es gilt $\sup(A^{-1}) = (\inf(A))^{-1}$.

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge mit mehr als einem Element. Zeigen Sie, dass

$$I \text{ ist ein Intervall} \Leftrightarrow \forall x, y \in I, x \neq y : [x, y] \subseteq I.$$

4. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkt und nicht leer. Definieren Sie für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D(x, A) &= \inf\{|x - y| \mid y \in A\} \\ Q(A, B) &= \sup\{D(x, A) \mid x \in B\}, \\ P(A, B) &= \max\{Q(A, B), Q(B, A)\}. \end{aligned}$$

a) Interpretieren Sie die Zahlen $D(x, A)$, $Q(A, B)$ und $P(A, B)$ auf der Zahlengeraden und beschreiben Sie diese in Worten.
b) Berechnen Sie $P(\{\frac{1}{2}\}, [0, 1])$ und $P([0, 1], (0, 2))$.

5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Element. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion $f : I \to \mathbb{R}$ gibt.

Bitte wenden!

6. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und seien $x, y \in \mathbb{R}$. Definieren Sie

$$D(x, A) = \inf\{|x - a| \mid a \in A\}$$

wie in Aufgabe 4 und berechnen Sie $D(\frac{1}{2}, [1, 2])$ und $D(\frac{1}{2}, [0, 1])$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $x \in A \Rightarrow D(x, A) = 0$,

b) $D(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$,

c) $\forall x \in [0, 1],\ D(x, \mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$,

d) $D(x, A) \leq p$ und $|x - y| \leq q$ implizieren zusammen $D(y, A) \leq p + q$,

e) $D(x, A) \leq p$ und $D(y, A) \leq q$ implizieren zusammen $|x - y| \leq p + q$.

Hinweise zu den Aufgaben:

3. Für die Richtung "$\Leftarrow$", zeigen Sie, dass $(\inf I, \sup I) \subset I$.

5. Sie dürfen den Satz von Cantor-Schröder-Bernstein verwenden.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Sie können hier Ihr Schulwissen über die Sinusfunktion als gegeben voraussetzen.

(a) $\inf \left\{ \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 1.$

(b) $\inf \left\{ \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$

(c) $\inf \left\{ \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \infty.$

(d) $\inf \left\{ \sin(\frac{1}{n})^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \pi.$

(e) $\inf \left\{ \sin(\frac{1}{n})^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \pi^2.$

(f) $\inf \left\{ \sin(\frac{1}{n})^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$

(g) $\sup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq x\} = 1.$

(h) $\sup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq x\} = 0.$

(i) $\sup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq x\} = \infty.$

Bitte wenden!

2. Sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Welche Aussagen über die Menge M sind richtig?

(a) Das Infimum existiert in $\mathbb{R}$, falls das Supremum in $\mathbb{R}$ existiert.

(b) Das Maximum existiert, falls das Supremum in $\mathbb{R}$ existiert.

(c) Das Supremum existiert in $\mathbb{R}$, falls das Maximum existiert.

(d) Falls $\sup M \leq \inf M$ gilt, so folgt, dass das Minimum und das Maximum existieren.

(e) Falls $\sup M \leq \inf M$ gilt, so folgt, dass das Minimum und das Maximum existieren und es gilt $\min M = \max M$.

(f) Falls das Maximum existiert, so existiert das Infimum in $\mathbb{R}$.

(g) Falls M beschränkt ist, so existiert das Maximum.

(h) Falls M endlich ist, so existiert das Maximum.

3. Gilt $\sup([0,1) \cup \{3/2\}) = \sup([0,1] \cup \{3/2\})$?

(a) Ja.

(b) Nein.

4. Gilt $\sup[-1,0) = \inf[0,1]$?

(a) Ja.

(b) Nein.

Siehe nächstes Blatt!

5. Was ist $\sup\{\sup\{x \in (0, \frac{1}{n})\}, n \in \mathbb{N}\}$?

(a) 1

(b) 0

(c) Keine der Antworten ist richtig.

6. Existiert $\max\{\sup\{x \in (0, \frac{1}{n})\}, n \in \mathbb{N}\}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 21. Oktober um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 19. Oktober 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 20. Oktober 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.