D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis I | HS 2016
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 5

1. Beweisen Sie $(xy)^m = x^m y^m$, $x^{m+n} = x^m x^n$ und $(x^m)^n = x^{mn}$ zuerst für alle $x, y \in \mathbb{C}$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion und dann für alle $x, y \in \mathbb{C}^\times$ und $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Zeigen Sie, dass für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, .$$

3. a) Im Kolloquium werden Sie folgende Version von Division mit Rest sehen: Falls d ein Polynom verschieden von Null ist, dann gibt es für jedes Polynom f zwei Polynome q, r mit $\deg(r) < \deg(d)$, $\deg(f) = \max\{\deg(q) + \deg(d), \deg(r)\}$ und $f = q \cdot d + r$. Zeigen Sie, dass die zwei Polynome q, r eindeutig durch f bestimmt sind.

b) Seien nun $f = x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ und $d = x^2 + 2x - 3$. Finden Sie zwei Polynome q, r wie in Teilaufgabe a), d.h. mit $\deg(r) < \deg(d)$, $\deg(f) = \deg(q) + \deg(d)$ und $f = q \cdot d + r$.

4. Zeigen Sie direkt, dass die folgenden Funktionen stetig sind:

a) $f_1 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$,

b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$.

5. Seien zwei Intervalle durch $I_1 = [a, b],\ I_2 = \ [b, c] \subset \mathbb{R}$ gegeben mit $a < b < c$ und seien $f_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [a, c] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in [a, b) \\ f_2(x) & \text{falls } x \in [b, c] \end{cases}$$

genau dann stetig ist, wenn $f_1(b) = f_2(b)$ gilt.

Bitte wenden!

6. Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz, um die Identität

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{m} = \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

für alle $k \leq n$ zu beweisen.

Hinweise zu den Aufgaben:

3. Wie auch bei anderen Eindeutigkeitsbeweisen beginnen Sie mit der Annahme, dass es Polynome q_1 und r_1 bzw. q_2 und r_2 gibt, die jeweils die Aussage der Division mit Rest erfüllen.

6. Betrachten Sie das Polynom $p(x) = (1 + (1 + x))^n = (2 + x)^n$ und finden Sie den Koeffizienten von x^k unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$. Welche der folgenden Ausdrücke sind gleich $\binom{n}{k}$?

(a) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$

(b) $\frac{n+1-k}{k}\binom{n}{k-1}$

(c) $\frac{n}{n+1-k}\binom{n}{k-1}$

(d) Keiner.

2. Sei $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $f_1 + f_2$ ist monoton steigend,

(b) $f_1 + f_2$ ist monoton fallend,

(c) $f_1 + f_2$ ist konstant,

(d) Keine der obigen Aussagen stimmt im Allgemeinen.

Siehe nächstes Blatt!

3. Welche der folgenden Aussagen sind für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig? (Hier erfüllt $i \in \mathbb{C}$ $i^2 = -1$.)

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 0$

(c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 2^n$

(d) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

(e) $\sum_{k=0}^{8} i^k \binom{8}{k} = 16$

(f) $\sum_{k=0}^{8} i^k \binom{8}{k} = 0$

4. Betrachten Sie die beiden Intervalle $I_1 = (0, 2)$ und $I_2 = (2, 4)$, sowie die beiden Funktionen $f_1 : I_1 \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2$ und $f_2 : I_2 \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x$. Definieren Sie nun die Funktion

$$f : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in I_1, \\ f_2(x) & \text{falls } x \in I_2. \end{cases}$$

Ist f stetig?

(a) Ja.

(b) Nein.

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 28. Oktober um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 26. Oktober 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 27. Oktober 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.