Übungsblatt 6

1. Berechnen Sie
$$\int_1^5 3x^2 - 4x + 1 \,\mathrm{d}x.$$

2. Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom f von ungeradem Grad eine (reelle) Nullstelle hat.

3. Sei f eine stetige Funktion auf (a,b) und seien $x_1, \ldots x_n \in (a,b)$. Zeigen Sie dass es ein $y \in (a,b)$ gibt, sodass
$$f(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wenn eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist, dann ist das Bild von f ein Intervall und f ist streng monoton.

5. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei T_U eine Menge von Treppenfunktionen mit $u \leq f$ für alle $u \in T_U$ und sei T_O eine Menge von Treppenfunktionen mit $o \geq f$ für alle $o \in T_O$. Angenommen für jedes $\varepsilon > 0$ existieren $u \in T_U$ und $o \in T_O$ mit
$$\int_a^b (o-u)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$
Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und
$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_a^b u\,\mathrm{d}x \mid u \in T_U\right\} = \inf\left\{\int_a^b o\,\mathrm{d}x \mid o \in T_O\right\}.$$

Bitte wenden!

6. a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : [0,1] \to [0,1], \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist.

b) Finden Sie eine Riemann-integrierbare Funktionen $f : [0,1] \to [0,1]$, sodass die Verknüpfung $f \circ g : [0,1] \to [0,1]$ *nicht* Riemann-integrierbar ist.

Hinweise zu den Aufgaben:

2. Schreiben Sie $f = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Zeigen Sie dann, dass es Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ geben muss mit $f(x) < 0$ und $f(y) > 0$.

5. Verwenden Sie den Beweis von Proposition 4.14 im Skript.

6. Wählen Sie f so, dass $f \circ g$ wie im Beispiel 4.19 vom Skript ist.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt die folgende Aussage?

$$(f(0) \neq 0) \Rightarrow \Big((\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \ : \ |x| < \delta \Rightarrow f(x) > 0) \vee \\ (\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \ : \ |x| < \delta \Rightarrow f(x) < 0) \Big)$$

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt die folgende Aussage?

$$(\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ : \ |x| < \delta \Rightarrow f(x) \neq 0) \Rightarrow (f(0) \neq 0)\,.$$

(a) Ja.

(b) Nein.

Siehe nächstes Blatt!

3. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige, Riemann-integrierbare Funktionen mit $\int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^y g(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $y \in [a, b]$. Folgt dann $f \leq g$?

(a) Ja.

(b) Ja, wenn wir zusätzlich annehmen, dass f und g stetig sind.

(c) Nein.

4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Folgt dann $f = 0$?

(a) Ja.

(b) Ja, wenn wir zusätzlich annehmen, dass f stetig ist.

(c) Nein.

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 4. November um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 2. November 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 3. November 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.