

## Übungsblatt 7

Für eine Folge  $(a_n)_n$  schreiben wir  $a_n \rightarrow A$  für  $n \rightarrow \infty$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 + 15}{3n^4 + n^3 + n - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5}{n^3 + n + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 10}{n^2 + 1}.$$

2. Sei  $(a_n)_n$  eine Folge reeller Zahlen mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n$ . Nehmen Sie an, dass es ein  $q \in (0, 1)$  gibt, sodass für alle  $n$  die Abschätzung  $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$  gilt. Zeigen Sie, dass  $a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für eine konvergente Folge  $(a_n)_n$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  ist die Folge  $(a_{n+\ell})_n$  konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+\ell}.$$

b) Sei  $(a_n)_n$  eine konvergente Folge. Jede Teilfolge  $(a_{n_k})_k$  von  $(a_n)_n$  konvergiert und hat denselben Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

4. a) Sei  $(a_n)_n$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $a$ . Zeigen Sie, dass dann das arithmetische Mittel

$$s_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

der Folge  $(a_n)$  auch gegen  $a$  konvergiert.

b) Geben Sie ein Beispiel einer divergenten Folge an, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

5. Sei  $(a_n)_n$  eine Folge nicht-negativer, reeller Zahlen mit  $a_{m+n} \leq a_m + a_n$  für alle  $m, n$ . Zeigen Sie, dass  $\frac{a_n}{n}$  gegen  $\inf\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  konvergiert.

**Bitte wenden!**

6. Der goldene Schnitt  $\phi \in \mathbb{R}$  ist die positive Lösung der Gleichung  $x = 1 + \frac{1}{x}$  und explizit gegeben durch die Formel  $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ . Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sei durch  $a_0 = 1$  und

$$a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n}$$

rekursiv definiert. Zeigen Sie, dass diese Folge gegen den goldenen Schnitt  $\phi$  konvergiert.

**Hinweise zu den Aufgaben:**

5. Für  $\varepsilon > 0$  finden Sie ein  $d \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{a_d}{d} < \inf\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} + \varepsilon$ . Division mit Rest in  $\mathbb{N}$  könnte auch nützlich sein.
6. Leiten Sie die Abschätzung  $|a_n - \phi| \leq \frac{1}{\phi^n} |1 - \phi|$  her.

**7. Multiple-Choice Fragen** (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei  $(a_n)_n$  eine Folge reeller Zahlen mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n$  und mit  $\frac{a_n}{n} \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

- (a)  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  konvergiert gegen 1.
- (b)  $a_{n+1} - a_n$  konvergiert gegen 1.

2. Welche der folgenden Folgen sind konvergent?

- (a)  $a_n = n + \frac{2}{n}$
- (b)  $a_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})$
- (c)  $a_n = \frac{3n}{n+2}$
- (d)  $a_n = \lfloor \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \rfloor$
- (e)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

**Siehe nächstes Blatt!**

**3.** Sei  $f$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen stimmen im Allgemeinen für die Folge  $a_n = f(\frac{1}{n})$ ?

- (a) Die Folge ist beschränkt.
- (b) Die Folge konvergiert.
- (c) Die Folge divergiert.
- (d)  $a_n \rightarrow f(1)$ , für  $n \rightarrow \infty$ .
- (e)  $a_n \rightarrow f(0)$ , für  $n \rightarrow \infty$ .

**4.** Nehmen Sie an, dass  $a_n$  gegen  $a$  konvergiert und  $b_n := a_{2n}$ . Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen für den Limes  $n \rightarrow \infty$ ?

- (a)  $a_n + 1 \rightarrow a + 1$ .
- (b)  $a_{n+1} \rightarrow a + 1$ .
- (c)  $b_n$  ist konvergent.
- (d)  $b_n \rightarrow 2a$ .
- (e)  $b_n \rightarrow a$ .

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter [echo.ethz.ch](http://echo.ethz.ch) zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 11. November um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 9. November 2016 bis 13:00 unter [echo.ethz.ch](http://echo.ethz.ch).
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 10. November 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.