

Übungsblatt 7

Für eine Folge $(a_n)_n$ schreiben wir $a_n \rightarrow A$ für $n \rightarrow \infty$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 + 15}{3n^4 + n^3 + n - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5}{n^3 + n + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 - 10}{n^2 + 1}.$$

2. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle n . Nehmen Sie an, dass es ein $q \in (0, 1)$ gibt, sodass für alle n die Abschätzung $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$ gilt. Zeigen Sie, dass $a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für eine konvergente Folge $(a_n)_n$ und $\ell \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(a_{n+\ell})_n$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+\ell}.$$

b) Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge. Jede Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ konvergiert und hat denselben Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

4. a) Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a . Zeigen Sie, dass dann das arithmetische Mittel

$$s_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

der Folge (a_n) auch gegen a konvergiert.

b) Geben Sie ein Beispiel einer divergenten Folge an, deren arithmetisches Mittel konvergiert.

5. Sei $(a_n)_n$ eine Folge nicht-negativer, reeller Zahlen mit $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ für alle m, n . Zeigen Sie, dass $\frac{a_n}{n}$ gegen $\inf\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert.

Bitte wenden!

6. Der goldene Schnitt $\phi \in \mathbb{R}$ ist die positive Lösung der Gleichung $x = 1 + \frac{1}{x}$ und explizit gegeben durch die Formel $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei durch $a_0 = 1$ und

$$a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n}$$

rekursiv definiert. Zeigen Sie, dass diese Folge gegen den goldenen Schnitt ϕ konvergiert.

Hinweise zu den Aufgaben:

5. Für $\varepsilon > 0$ finden Sie ein $d \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_d}{d} < \inf\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} + \varepsilon$. Division mit Rest in \mathbb{N} könnte auch nützlich sein.
6. Leiten Sie die Abschätzung $|a_n - \phi| \leq \frac{1}{\phi^n} |1 - \phi|$ her.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle n und mit $\frac{a_n}{n} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

- (a) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konvergiert gegen 1.
- (b) $a_{n+1} - a_n$ konvergiert gegen 1.

2. Welche der folgenden Folgen sind konvergent?

- (a) $a_n = n + \frac{2}{n}$
- (b) $a_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})$
- (c) $a_n = \frac{3n}{n+2}$
- (d) $a_n = \lfloor \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \rfloor$
- (e) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Siehe nächstes Blatt!

3. Sei f eine stetige Funktion auf \mathbb{R} . Welche der folgenden Aussagen stimmen im Allgemeinen für die Folge $a_n = f(\frac{1}{n})$?

- (a) Die Folge ist beschränkt.
- (b) Die Folge konvergiert.
- (c) Die Folge divergiert.
- (d) $a_n \rightarrow f(1)$, für $n \rightarrow \infty$.
- (e) $a_n \rightarrow f(0)$, für $n \rightarrow \infty$.

4. Nehmen Sie an, dass a_n gegen a konvergiert und $b_n := a_{2n}$. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen für den Limes $n \rightarrow \infty$?

- (a) $a_n + 1 \rightarrow a + 1$.
- (b) $a_{n+1} \rightarrow a + 1$.
- (c) b_n ist konvergent.
- (d) $b_n \rightarrow 2a$.
- (e) $b_n \rightarrow a$.

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 11. November um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 9. November 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 10. November 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.