D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis I — HS 2016
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 8

1. Sei $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$. Berechnen Sie die folgenden einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\searrow 3} f(x), \quad \lim_{x\nearrow 3} f(x),$$
$$\lim_{x\searrow -3} f(x), \quad \lim_{x\nearrow -3} f(x).$$

2. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei reelle Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

3. a) Sei $\alpha > 0$ eine positive Zahl. Zeigen Sie, dass eine Konstante $C_\alpha > 0$ existiert mit $\log(x) \leq C_\alpha x^\alpha$ für alle $x > 0$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $\beta > 0$ gilt, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\beta} = 0$.

4. a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f dann auch gleichmässig stetig ist.

b) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ an, welche zwar gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

5. a) Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\mathcal{F}$ ein Filter auf D. Zeigen Sie, dass der Grenzwert $A \in \overline{\mathbb{R}}$ von f entlang des Filters $\mathcal{F}$ eindeutig durch f bestimmt ist.

b) Seien D und $\mathcal{F}$ wie in Teilaufgabe a) und seien $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\mathcal{F}} f_1 = A_1 \in \mathbb{R}$ und $\lim_{\mathcal{F}} f_2 = A_2 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{\mathcal{F}}(f_1 + f_2) = A_1 + A_2$ gilt.

Bitte wenden!

6. a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion und sei $x_0 \in (a,b)$. Dann existieren

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \text{ und } \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

b) Alle Unstetigkeitsstellen von f in (a,b) sind Sprungstellen und f hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Hinweise zu den Aufgaben:

3. Schreiben Sie $x = \exp(y)$ für $y \in \mathbb{R}$ und unterscheiden Sie die Fälle $y < 0$ und $y \geq 0$. Verwenden Sie weiters $(1 + \frac{y}{n})^n \leq \exp(y)$ für $y \geq 0$.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass eine stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist. Wie sind wir im Beweis vorgegangen?

(a) Wir nehmen indirekt an, dass f nicht Riemann-integrierbar ist. Dann würde es jedoch eine obere Treppenfunktion o und eine untere Treppenfunktion u von f geben mit $\int_a^b (o-u)\,\mathrm{d}x > \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Dies ist wegen der Stetigkeit von f jedoch nicht möglich.

(b) Da f stetig ist, ist f auch stückweise monoton. Da das Intervall $[a,b]$ kompakt ist, finden wir eine endliche Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, sodass f auf jedem Intervall (x_i, x_{i+1}) monoton ist. Wir wissen bereits, dass monotone Funktionen Riemann-integrierbar sind, somit also auch f.

(c) Da f stetig auf einem kompakten Intervall ist, ist f auch beschränkt und wir finden eine obere und eine untere Treppenfunktion von f, welche beide endliches Riemann-Integral haben. Daraus folgern wir, dass auch f Riemann-integrierbar sein muss.

(d) Da f stetig ist, finden wir eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ von $[a,b]$, sodass f in einem Intervall (x_i, x_{i+1}) nur sehr gering variiert. Dies gibt uns eine obere und eine untere Treppenfunktion, welche für feiner werdende Zerlegungen immer näher zusammenrücken.

Siehe nächstes Blatt!

2. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wie gehen wir vor, wenn wir zeigen möchten, dass f Lipschitz-stetig ist?

(a) Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ und finden ein L (abhängig von ε), sodass für $x, y \in [a,b]$ folgendes gilt: Falls $|x-y| < \varepsilon$, dann folgt $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$.

(b) Wir starten mit $|f(x) - f(y)|$ für beliebige $x, y \in [a,b]$ und manipulieren diesen Ausdruck solange, bis er von der Form $\leq L|x-y|$ ist, wobei $L > 0$ nicht von x und y abhängt.

(c) Wir müssen gar nichts zeigen, da das Intervall $[a,b]$ kompakt ist und somit alle Funktionen auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig sind.

(d) Wir wählen $L = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$ und zeigen, dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ gilt für alle $x, y \in [a,b]$.

3. Die Axiome von $\mathbb{R}$ inkludieren das Vollständigkeitsaxiom. Für welche der folgenden Definitionen oder Aussagen wurde das Vollständigkeitsaxiom zwingend benötigt?

(a) Division mit Rest.

(b) Geometrische Summenformel.

(c) Definition des Riemann-Integrals einer beschränkten Funktion.

(d) Definition der Exponentialabbildung.

4. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ existiert nicht.

(d) $\lim_{x\searrow 0} \frac{\log(x)}{x} = 0.$

(e) $\lim_{x\searrow 0} \frac{\log(x)}{x} = 1.$

(f) $\lim_{x\searrow 0} \frac{\log(x)}{x}$ existiert nicht in $\mathbb{R}$.

(g) $\lim_{x\to\infty} x^{\sqrt{x}} \exp(-x) = 0.$

(h) $\lim_{x\to\infty} x^{\sqrt{x}} \exp(-x) = 1.$

(i) $\lim_{x\to\infty} x^{\sqrt{x}} \exp(-x) = e.$

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.

- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 18. November um 8:00.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 16. November 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.

- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 17. November 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.