Übungsblatt 9

1. Verwenden Sie das Wurzel-, Quotienten- oder das Majorantenkriterium, um zu überprüfen, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$

2. Zeigen Sie für $p \in \mathbb{R}$, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^p}$$

genau dann konvergiert, wenn $p > 1$ ist.

3. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k(n-k).$$

4. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Bitte wenden!

5. Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

existiert. Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt:

$$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent.}$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist divergent und } (a_n)_n \text{ konvergiert nicht gegen Null.}$$

6. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen mit nicht-negativen Gliedern. Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ ist definiert als der Grenzwert der Folge der Partialprodukte

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k).$$

Zeigen Sie, dass die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn der Grenzwert

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) := \lim_{n\to\infty} p_n$$

existiert.

Hinweise zu den Aufgaben:

3. Verwenden Sie Riemannsche Summen.

6. Verwenden Sie, dass $1 + x \leq \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Es gilt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ nicht absolut konvergiert. Kann man daraus ableiten, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ auch nicht absolut konvergiert?

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+i^n}{(3i)^n-2^n}$, wobei $i^2 = -1$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

3. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ aus?

(a) "Die Reihe konvergiert."

(b) "Die Reihe divergiert."

(c) Nichts.

4. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ aus?

(a) "Die Reihe konvergiert."

(b) "Die Reihe divergiert"

(c) Nichts.

5. Sei $0 \leqslant q < 1$. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} q^n$ aus?

(a) “Die Reihe konvergiert.”

(b) “Die Reihe divergiert”

(c) Nichts.

6. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Es gibt eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varphi(n)+1}}{\varphi(n)} = e^{20}$.

(b) Es gibt eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\varphi(n)+1}}{\varphi(n)(\log \varphi(n))^2} = e^{20}$.

(c) Es gibt eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varphi(n)+1}}{\varphi(n)^2} = e^{20}$.

7. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow (a_n)_n$ ist eine Nullfolge.

(b) $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(c) ($a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow$ Die Folge $(a_n)_n$ ist monoton fallend.

Siehe nächstes Blatt!

8. Aus dem Chauchy-Kriterium folgt, dass für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq m \geq N$ die Abschätzung

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

gilt.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

9. Für die Logarithmus-Abbildung (siehe Vorlesung oder Skript) gilt:

(a) $\log(3) > 1$.

(b) $\log(3) < 1$.

(c) $\log(3) = 1$.

(d) $\log$ ist monoton wachsend.

(e) $\log$ ist monoton fallend.

Bitte wenden!

10. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Die Menge der komplexwertigen Folgen $(a_n)_n$ für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert stellt einen Vektorraum dar, aber die Folgen $(a_n)_n$ für welche die Reihe absolut konvergiert bildet keinen Unterraum.

(b) Die Menge der komplexwertigen Folgen $(a_n)_n$ für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert stellt einen Vektorraum dar und die Folgen $(a_n)_n$ für welche die Reihe absolut konvergiert bildet einen Unterraum.

(c) Die Menge der komplexwertigen Folgen $(a_n)_n$ für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert ist kein Vektorraum.

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 25. November um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 23. November 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 24. November 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.