Übungsblatt 10

1. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass sich f als Summe einer geraden Funktion f_g und einer ungeraden Funktion f_u schreiben lässt. Zeigen Sie ausserdem, dass die Funktionen f_g und f_u eindeutig durch f bestimmt sind.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Zeigen Sie unter Verwendung von Satz 6.81 im Skript, dass

$$\int_a^b \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(b) - \sin(a).$$

3. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius R durch

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

gegeben ist, sofern der obige Grenzwert existiert.

b) Zeigen Sie anhand des Beispiels

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3^n & \text{falls } n \text{ undgerade} \end{cases}$$

dass der Konvergenzradius im Allgemeinen nicht gleich

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

ist.

4. Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

Bitte wenden!

5. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktionenfolge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion. Sei $z_0 \in D$ und $z_n \in D$ eine Folge mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$.

a) Zeigen Sie $f_n(z_n) \to f(z_0)$ für $n \to \infty$ unter der Annahme, dass f_n gleichmässig gegen f konvergiert für $n \to \infty$.

b) Finden Sie ein Beispiel, wo zwar f_n punktweise gegen f konvergiert für $n \to \infty$, aber $f_n(z_n)$ nicht gegen $f(z_0)$ konvergiert für $n \to \infty$.

6. Für welche $z \in \mathbb{C}$ existiert die folgende Reihe?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

Betrachten Sie auch die Punkte mit $|z|$ gleich dem Konvergenzradius.

Hinweise zu den Aufgaben:

4. Verwenden Sie Aufgabe 3.

6. Für $|z| = R$ können Sie auch die Summationsformel von Abel verwenden.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Wir haben in der letzten und in dieser Serie bewusst mehr MC-Aufgaben eingebaut. Welche der folgenden Aussagen ist für Sie richtig?

(a) Ich schätze dies, da ich dadurch mehr Übungsmöglichkeiten für den freiwilligen MC-Test am Montag, 12. Dezember um 8:15 Uhr habe.

(b) Mir wäre es lieber, wenn es wie vorher nur vier bis sechs MC-Aufgaben gibt, da ich zu wenig Zeit habe.

2. Was ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

(a) 0

(b) $1/2$

(c) 1

(d) ∞

3. Was ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(a) 0

(b) $1/2$

(c) 1

(d) ∞

4. Was ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\dots$$

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) ∞

5. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Dann haben die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

denselben Konvergenzradius.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

6. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Es gibt eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R=+\infty$.

(b) Für jedes $R\in(0,+\infty)$ gibt es eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R.

(c) Es gibt eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R=0$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Sei $(f_n)_n$ eine komplexwertige Funktionenfolge auf einer Menge X und f eine weitere komplexwertige Funktion auf X. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen richtig?

(a) Wenn f_n gleichmässig gegen f konvergiert, dann konvergiert f_n auch punktweise gegen f.

(b) Wenn f_n punktweise gegen f konvergiert, dann konvergiert f_n auch gleichmässig gegen f.

(c) Keine der obigen beiden Aussagen ist im Allgemeinen richtig.

8. Die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ konvergieren punktweise gegen $g(x) = |x|$. Konvergieren die Funktionen g_n auch gleichmässig gegen g?

(a) Ja.

(b) Nein.

9. Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2 + 1}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) f_n konvergiert weder punktweise noch gleichmässig auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) f_n konvergiert punktweise, aber nicht gleichmässig auf $\mathbb{R}$.

(c) f_n konvergiert gleichmässig und somit auch punktweise auf ganz $\mathbb{R}$.

10. Falls die reellwertige, Riemann-integrierbare Funktionenfolge $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ punktweise gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) Ja, das gilt immer.

(b) Ja, falls wir zusätzlich annehmen, dass f_n gleichmässig gegen f konvergiert.

(c) Nein, selbst wenn f_n gleichmässig gegen f konvergiert, stimmt das im Allgemeinen nicht.

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 2. Dezember um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 30. November 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 1. Dezember 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.