Übungsblatt 11

1. Zeigen Sie, dass für $z, w \in \mathbb{C}$ die Additionsformel

$$\tan(z+w) = \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}$$

gilt, wo sie definiert ist. Finden und beweisen Sie eine analoge Additionsformel für den Cotangens.

2. a) Sei $w = re^{i\vartheta}$. Zeigen Sie, dass die Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^n - w$ (die n-ten Wurzeln von w) gerade durch

$$\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\vartheta}{n}},\ \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\vartheta}{n}+i\frac{2\pi}{n}}, \ldots, \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\vartheta}{n}+i\frac{2\pi(n-1)}{n}}$$

gegeben sind und dass diese paarweise verschieden sind, falls $w \neq 0$.

b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Identität

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi k}{n}} = 0.$$

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für zwei n-mal stetig differenzierbare Funktionen f und g auf $\mathbb{R}$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\,x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k} g}{\mathrm{d}\,x^{n-k}}$$

gilt, wobei $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,x^k} f = f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f darstellt.

4. Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion f auf $\mathbb{R}$, welche n-mal stetig differenzierbar, aber nicht $(n+1)$-mal stetig differenzierbar ist und beweisen Sie dies.

5. Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann f auch Lipschitz-stetig ist.

Bitte wenden!

6. **(Zwischenwertsatz für die Ableitung)** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, dass zu jedem c zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ ein $\xi \in [a, b]$ existiert mit $f'(\xi) = c$. (Die Stetigkeit der Ableitung ist hier *nicht* vorausgesetzt.)

Hinweise zu den Aufgaben:

1. Verwenden Sie bereits bekannte Additionsformeln.

6. Betrachten Sie die Extrema der Funktion $g(x) := f(x) - cx$.

7. **Multiple-Choice Fragen** (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist f dann differenzierbar?

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Ist f dann differenzierbar?

(a) Ja.

(b) Nein.

3. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann f stetig?

(a) Ja.

(b) Nein.

4. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann f gleichmässig stetig?

(a) Ja.

(b) Nein.

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann f Lipschitz-stetig?

(a) Ja.

(b) Nein.

6. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann f gleichmässig stetig?

(a) Ja.

(b) Nein.

7. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folgt dann $|f'(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

8. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Folgt dann, dass $(fg)' = f'g'$?

(a) Ja.

(b) Nein.

9. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f \circ g$ differenzierbar ist. Ist dann (mindestens) eine der beiden Funktionen f, g notwendigerweise differenzierbar?

(a) Ja.

(b) Nein.

Bitte wenden!

10. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin(\sqrt{x+1})$. Was ist die richtige Ableitung von f?

(a) $\cos(\sqrt{x+1})\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(b) $\cos(x)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

(c) $\cos(\sqrt{x+1}) + \sin(\sqrt{x+1})\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

11. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = e^{x^5}e^{x^4}e^{x^3}e^{x^2}e^{x}$. Welches ist die richtige Ableitung von f?

(a) $5!x^{4+3+2+1}e^{x^5}e^{x^4}e^{x^3}e^{x^2}e^{x}$

(b) $e^{x^5}e^{x^4}e^{x^3}e^{x^2}e^{x}(5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$

(c) Keine der Antworten ist richtig.

12. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}x^k$, wobei $N \in \mathbb{N}$. Was ist die richtige Ableitung von f?

(a) $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}x^{k-1}$

(b) $\sum_{k=1}^{N} x^k$

(c) $\sum_{k=0}^{N-1} x^k$

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 9. Dezember um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 7. Dezember 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnerstag, 8. Dezember 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.