Übungsblatt 12

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a\sin(x) + b\cos(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = \sin(x).$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

3. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = x^4$$
$$y(1) = 1$$

auf dem Intervall $(0, \infty)$.

4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei f' im Punkt $x \in (a, b)$ differenzierbar. Beweisen Sie den folgenden Ausdruck für die zweite Ableitung von f im Punkt x:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

5. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sodass es Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$C_1 f(x) \leq f'(x) \leq C_2 f(x)$$

für alle $x \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$f(0)e^{C_1 x} \leq f(x) \leq f(0)e^{C_2 x}$$

für alle $x \geq 0$ gelten muss.

Bitte wenden!

6. a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn für alle $x, y \in I$ die Ungleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

b) Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ eine konvexe Funktion ist.

Hinweise zu den Aufgaben:

1. Betrachten Sie $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x)\right)$ und finden Sie eine reelle Zahl θ mit $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. Obwohl dies eine Differential-Ungleichung darstellt, kann ein Argument, das schon in der Diskussion der Differentialgleichungen verwendet wurde, wiederverwertet werden.

6. Um die Konvexität von f zu beweisen, zeigen Sie mittels Induktion nach n zunächst

$$f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ und für $t \in \{\frac{m}{2^n} \mid m = 0, 1, \ldots, 2^n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

Ausserdem gibt es eine Aufgabe, bei welcher der Satz von de l'Hôspital nützlich ist.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{x - \sin(x)}$$

ist gleich

(a) 1

(b) 2

(c) 6

Siehe nächstes Blatt!

2. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\tan(x)}$$

ist gleich

(a) 0

(b) 1

(c) π

3. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

ist gleich

(a) 1

(b) 2

(c) 3

4. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$$

ist gleich

(a) 0

(b) 1

(c) e

Bitte wenden!

5. Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ monoton wachsend und differenzierbar. Dann gilt:

(a) $\frac{1}{f}$ ist monoton wachsend.

(b) $\frac{1}{f}$ ist monoton fallend.

(c) Keine Aussage gilt im Allgemeinen.

6. Sei $f : (a,b) \longrightarrow I$ streng monoton wachsend, bijektiv und differenzierbar. Dann gilt:

(a) f^{-1} ist monoton wachsend.

(b) f^{-1} ist monoton fallend.

(c) Keine Aussage gilt im Allgemeinen.

7. Die Gleichung $y^2 = cx$ ist die allgemeine Lösung von

(a) $y' = 2y/x$

(b) $y' = 2x/y$

(c) $y' = y/(2x)$

(d) $y' = x/(2y)$

8. Die Gleichung $y = C_1 x + C_2 e^x$ ist die allgemeine Lösung von

(a) $(x+1)y'' - xy' + y = 0$

(b) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$

(c) $(x+1)y'' + xy' + y = 0$

(d) $(x-1)y'' + xy' + y = 0$

Siehe nächstes Blatt!

9. Welche Differentialgleichung hat als Lösung die Familie aller Geraden, welche durch den Ursprung verlaufen?

(a) $y - xy' = 0$

(b) $x + yy' = 0$

(c) $y + xy' = 0$

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 16. Dezember um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 14. Dezember 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnterstag, 15. Dezember 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.