Übungsblatt 13

1. Wir berechnen das Integral $\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ auf zwei verschiedene Arten:

1. Variante: Wir substituieren $u = 2x$ und erhalten

$$\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \sin(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C.$$

2. Variante: Wir verwenden die Identität $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und erhalten mit partieller Integration

$$\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = 2\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2(x) + C$$

Verifizieren Sie die beiden Rechnungen und erklären Sie, warum sich die Resultate unterscheiden.

2. Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x}\,\mathrm{d}x$$

3. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int \log(x^2 + 2)\,\mathrm{d}x$

b) $\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int \sqrt{1 - \cos(x)}\,\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{\cos^3(x)}{1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

Bitte wenden!

4. a) Berechnen Sie $\int x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Geben Sie eine rekursive Formel zur Berechnung von $\int x^n \exp(x)\,\mathrm{d}x$ an.

c) Berechnen Sie $\int x^s \log(x)\,\mathrm{d}x$ für jedes $s \in \mathbb{R}$. Beachten Sie hierbei, dass der Fall $s = -1$ getrennt zu behandeln ist.

5. Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, sodass f' beschränkt und Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass dann

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in [a, b]$.

Bemerken Sie, dass Sie Korollar 8.6 aus dem Skript nicht verwenden können, da die Annahmen an f verschieden sind.

6. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir wollen hier zeigen, dass

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$, wobei die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten für $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}$$

definiert sind.

(a) Zeigen Sie, dass für $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ die Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Konvergenzradius 1 hat.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von g und zeigen Sie, dass $f(x) = (1 + x)^\alpha$ und $g(x)$ die Differentialgleichung

$$y' = \alpha \frac{y}{1 + x}$$

erfüllen.

(c) Berechnen Sie die Ableitung von $\frac{g(x)}{f(x)}$ und schliessen Sie die Behauptung.

Siehe nächstes Blatt!

Hinweise zu den Aufgaben:

3. Verwenden Sie die Identität $\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})$.

5. Verwenden Sie Riemann-Summen

6. Für (b) müssen Sie die Gleichung

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha}{n}$$

zeigen (was mit der richtigen Interpretation des Produkts $\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)$ auch für $n = 0$ gilt).

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Die Existenz einer Stammfunktion von f ist garantiert,

(a) wenn f stetig ist.

(b) wenn f stückweise stetig ist.

(c) wenn f differenzierbar ist.

(d) immer

2. In der folgenden Rechnung wird die Substitution $y = x^2$ durchgeführt.

$$\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{1}^{1} \frac{1}{2}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_1^1 = \frac{1}{3}(1-1) = 0.$$

Ist dies eine korrekte und sinnvolle Substitution?

(a) Ja.

(b) Nein.

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Anwendungen der partiellen Integration sind korrekt und zielführend?

(a) $\int x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 \sin(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cos(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^2 \cos(x) + \int 2x \cos(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Mittwoch 13:00 ist erst in der nächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Freitag, 23. Dezember um 8:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Mittwoch, 21. Dezember 2016 bis 13:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie ausgewählt wurden: Donnterstag, 22. Dezember 2016 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.