Übungsblatt 1

1. Berechnen Sie das Volumen und der Vase

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [-\pi, 2\pi],\ 0 \leq \sqrt{y^2+z^2} \leq \sin(x)+2\right\}.$$

2. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des "uneigentlichen Rotationskörpers", der entsteht, wenn man das Gebiet unter dem Graphen der Funktion

$$x \in [1,\infty) \mapsto \frac{1}{x}$$

um die x-Achse rotiert.

3. Sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 1 - x^2$. Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers, der durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht.

4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log(k))^{\log(k)}}$

b) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log(k))^{\log\log(k)}}$

5. Entscheiden Sie, für welche $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_0^\infty x \sin(x^p)\,\mathrm{d}x$$

6. In dieser Aufgabe wollen wir noch eine weitere Begründung für die Definition der Bogenlänge eines Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ geben. Hierfür interpretieren wir $\|v\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$ als die Länge eines Vektors $v = (v_1,v_2)^t \in \mathbb{R}^2$ und $d(v,w) = \|v-w\|$ als den Abstand zweier Punkte $v, w \in \mathbb{R}^2$. Die **totale Variation** von $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ist definiert als

$$V(\gamma) = \sup_{\mathfrak{Z}} \sum_{k=1}^{n} \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\mathfrak{Z} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ von $[a,b]$ genommen wird. Nehmen Sie nun an, dass γ stetig differenzierbar ist und zeigen Sie $V(\gamma) = L(\gamma)$ (siehe Abschnitt 8.3.2).

Bitte wenden!

7. **Multiple-Choice Fragen** (Mehrere Antworten können richtig sein!) Die Abgabe auf echo.ethz.ch ist voraussichtlich ab Anfang Januar möglich.

1. Was ist der Wert des folgenden unbestimmten Integrals?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) 0

(b) 1

(c) $\pi/2$

(d) ∞

2. Die folgende Reihe ist konvergent:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\log(k))^2}{k^{\log\log(k)}}$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

3. Die folgende Reihe ist konvergent:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log\log(k))^{\log\log(k)}}$$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

4. Der Wert des unbestimmten Integrals

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x$$

ist

(a) 0

(b) 2

(c) 4

(d) Nicht definiert.

5. Welche der folgenden Integrale sind (eigentliche) Riemann-Integrale?

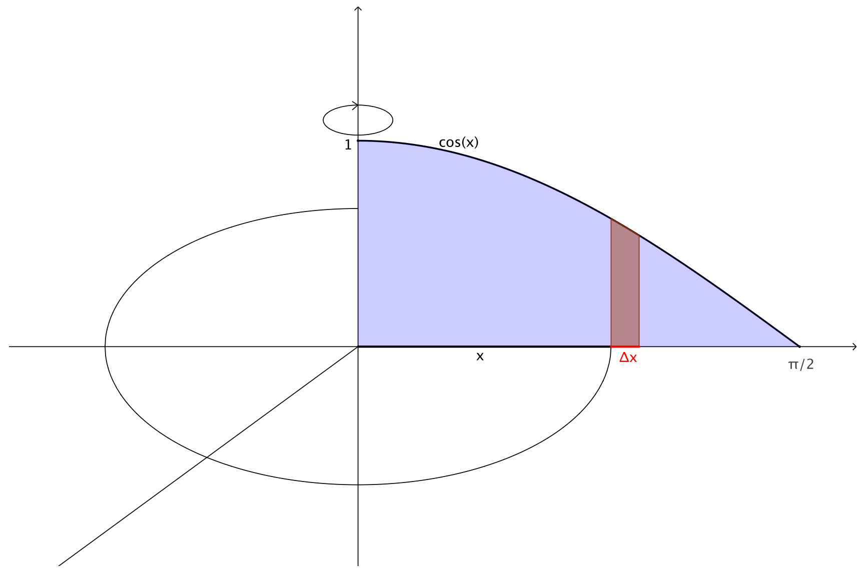
(a) $\int_{-2}^{2} \mathrm{Si}(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Bitte wenden!



6. Betrachte die Fläche $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2,\ 0 \leq y \leq \cos(x)\}$. Wir möchten das Volumen des Körpers berechnen, welcher entsteht, wenn wir dieses Gebiet um die y-Achse rotieren. Dabei möchten wir wie folgt vorgehen: Wir berechnen zuerst das Volumen eines schmalen Streifens in der Fläche (siehe Bild), welcher um die y-Achse rotiert wird und summieren schliesslich all diese Volumen auf, was zu einer Riemann-Summe führt. Um einen Ausdruck für das Volumen des Rotationskörpers zu erhalten, betrachten wir den Grenzwert der Riemann-Summe, wenn die Breite der Streifen gegen Null geht. Welches ist der korrekte Ausdruck für das gesuchte Volumen?

(a) $\pi \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^2 \, \mathrm{d}x$

(b) $\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(x))^2 \, \mathrm{d}x$

(c) $2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos(x) \, \mathrm{d}x$

(d) $\pi \int_0^{\pi/2} x \cos(x) \, \mathrm{d}x$

(e) $\pi \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) \, \mathrm{d}x$

Siehe nächstes Blatt!

- Bitte schreiben Sie Sich bis Freitag, 17. Februar um 12:00 unter echo.ethz.ch für eine Übungsgruppe ein. Sie werden ca. eine Woche vor Semesteranfang eine Einladung für die Einschreibung erhalten.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 20. Februar 2017 um 13:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Samstag, 18. Februar 2017 bis 18:00 unter echo.ethz.ch.
- Sie müssen Ihre schriftlichen Lösungen diese Woche nicht vor der Übungsstunde abgeben.

Hinweise zu den Aufgaben: Da es kein StudyCenter für diese Serie in der Semesterpause gibt, geben wir Ihnen hier noch einige Tipps zu allen Aufgaben der Serie 1.

1. Benutzen Sie die Formel (8.9) aus dem Skript und schauen Sie Sich Beispiel 8.40 noch einmal an.
2. Benutzen Sie die Formel aus Kapitel 8.3.4 im Skript und schauen Sie Sich Beispiel 8.43 noch einmal an.
3. Benutzen Sie die Formel aus Kapitel 8.3.4 im Skript und schauen Sie Sich Beispiel 8.43 noch einmal an.
4. Verwenden Sie den Integraltest für Reihen (Satz 8.50 im Skript) und die Substitution $u = \log(x)$. Versuchen Sie dann, das Integral durch ein konvergentes Integral nach oben oder durch ein divergentes Integral nach unten abzuschätzen, je nach dem ob die Reihe konvergiert oder divergiert.
5. Für $p > 0$ verwenden Sie am besten die Substitution $u = x^p$ und ziehen Sie je nach Fall das Leibnitz-Kriterium hinzu.
6. Verwenden Sie den Mittelwertsatz für γ_j in jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ für $j = 1, 2$ und $k = 1, \ldots, n$. Benutzen Sie die Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^2$ um zu zeigen, dass die Summe für feinere Partitionen nicht kleiner wird und verwenden Sie Satz 5.94 (Riemann-Integral über Riemann-Summen) aus dem Skript.