Übungsblatt 2

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(3x)$. Berechnen Sie die Taylor-Reihe bei $x_0 = 0$.

2. Approximieren Sie $\log(\frac{3}{2})$ durch eine rationale Zahl mit einer Fehlertoleranz von maximal $\frac{1}{24}$.

3. (a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f \in R([a, b])$ für alle $b > a$. Wir nennen das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ *absolut konvergent*, falls $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergent ist. Zeigen Sie, dass absolute Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ Konvergenz impliziert.

(b) Finden Sie ein konvergentes, aber nicht absolut konvergentes uneigentliches Integral dieser Form.

4. Gegeben sei ein nicht-leeres Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$, Zahlen $x, x_0 \in (a, b)$ und eine $(n + 1)$-mal differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion

$$F : t \in (a, b) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k$$

durch $t \in (a, b) \mapsto \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$ gegeben ist.

(b) Wenden Sie den Mittelwertsatz (Satz 7.30) auf die obige Funktion F an, um die Formel $R^{(n)}_{f,x_0}(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_C)(x-\xi_C)^n(x-x_0)$ für das Restglied nach Cauchy zu beweisen.

(c) Verwenden Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 7.53) für obiges F und die Funktion $g : t \mapsto (x-t)^{n+1}$, um die Formel $R^{(n)}_{f,x_0}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_L)(x-x_0)^{n+1}$ für das Restglied nach Lagrange zu beweisen.

Bitte wenden!

5. Verwenden Sie die Methodik aus Kapitel 8.7.3, um die Divergenzrate

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)$$

für $N \to \infty$ der harmonischen Reihe zu beweisen.

6. Es wird eine Münze n-mal geworfen. Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze höchstens $(\frac{1}{2} - \varepsilon)n$-mal auf den Kopf fällt, für $n \to \infty$ gegen Null geht.

Hinweise zu den Aufgaben:

2. Entwickeln Sie die Funktion $\log(1 + x),\ x \geq 0$ um die Stelle $x_0 = 0$ mittels der Taylor-Formel, um den Fehler abzuschätzen.

6. Sie dürfen annehmen, dass $2^{-n}\binom{n}{k}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei n-maligem Wurf die Münze k-mal auf den Kopf fällt. Verwenden Sie die Formel von Stirling (siehe Abschnitt 8.7 im Skript) und zeigen Sie auch, dass die Funktion $x \in (0, 1) \mapsto x \log(x) + (1 - x) \log(1 - x)$ ein striktes lokales Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ hat.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{2x + 2},\ x \geq -1$. Welche der folgenden Polynome sind Taylorpolynome von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$?

(a) $\sqrt[3]{2}$

(b) 2

(c) $\frac{3}{2} + \frac{1}{6}x$

(d) $2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{72}x^2$

(e) $2 + \frac{1}{6}(x - 3) - \frac{1}{72}(x - 3)^2$

Siehe nächstes Blatt!

2. Die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x},\ x \geq -1$ bezüglich der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ ist gegeben durch

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$

(b) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n$

3. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind im allgemeinen richtig?

(a) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht unbedingt > 0.

(c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(d) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

4. Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ dargestellt?

(a) $(1-x)^{-1}$

(b) $(1-x)^{-2}$

(c) $(1+x)^{-2}$

(d) $x(1-x)^{-2}$

5. Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}+(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)!}$ dargestellt?

(a) $\sin(x) + \sinh(x)$

(b) $x\sin(x) + \frac{1}{x}\sinh(x)$

(c) $x\sin(x) + x\sinh(x)$

(d) $x\cos(x) + \frac{1}{x}\cos(x)$

Bitte wenden!

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.

- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 27. Februar 2017 um 13:00.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 24. Februar 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.

- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 24. Februar 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.