Übungsblatt 3

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt

$$|\mathrm{d}(x_1, x_2) - \mathrm{d}(x_2, x_3)| \leq \mathrm{d}(x_1, x_3).$$

2. Sei X eine Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Sei $f : X \to Y$ eine injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass $\mathrm{d}_X(x_1, x_2) = \mathrm{d}_Y(f(x_1), f(x_2))$ für $x_1, x_2 \in X$ eine Metrik auf X definiert. Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{d}(x, y) = |e^x - e^y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert und dass $\mathrm{d}(x, y) = |\log(\frac{x}{y})|$ für $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert.

3. (a) (Manhattenmetrik) Sei $X = [0, 1]^2$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d}_{NY}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ eine Metrik auf X definiert.

(b) (Metrik der französischen Eisenbahn) Sei $X = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{d}(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1 - z_2| & \text{falls } z_1, z_2 \text{ linear abhängig über } \mathbb{R} \text{ sind} \\ |z_1| + |z_2| & \text{falls } z_1, z_2 \text{ linear unabhängig über } \mathbb{R} \text{ sind} \end{cases}$$

für $z_1, z_2 \in X$ eine Metrik auf X definiert.

(c) Sei $X = [0, 1]^2$ Finden Sie eine Folge in X, die zwar bezüglich d_{NY}, aber nicht bezüglich d konvergiert (wobei wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und damit X mit einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ identifizieren).

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{\mathrm{d}}(x, y) = \frac{\mathrm{d}(x, y)}{1 + \mathrm{d}(x, y)}$$

für $x, y \in X$ eine Metrik auf X definiert.

Bitte wenden!

5. Sei $p > 1$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_d)^t \in \mathbb{R}^d$ und definiere

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p}$$

In dieser Aufgabe möchten wir zeigen, dass $\|\cdot\|_p$ für jedes $p > 1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ ist. Verifizieren Sie zuerst, dass $\|\cdot\|_p$ definit und homogen ist. Zeigen Sie dann die Dreiecksungleichung in folgenden Schritten. Sei $q = \frac{p}{p-1}$.

a) (Young-Ungleichung) Zeigen Sie für $a, b \geq 0$ die Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

b) (Hölder Ungleichung) Zeigen Sie für $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^t$ und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)^t$ die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q .$$

c) (Minkowski Ungleichung) Zeigen Sie für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p .$$

6. Sei $K = [a, b]$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$ in $\mathbb{R}$. Wir betrachten den Vektorraum $V = C([a, b])$ und definieren

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

für $f \in V$.

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf V ist. Konvergenz in V bezüglich der von $\|\cdot\|_1$ induzierten Metrik nennt man Konvergenz im Mittel.

b) Finden Sie eine Folge $(f_n)_n$ in V mit $\|f_n\|_1 \to 0$ für $n \to \infty$ und $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Finden Sie eine Cauchy-Folge $(g_n)_n$ in V, welche keinen Grenzwert in V besitzt. Eine Folge $(g_n)_n$ ist eine Cauchy-Folge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\|g_m - g_n\|_1 < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

Siehe nächstes Blatt!

Hinweise zu den Aufgaben:

5. Betrachten Sie für a) die Funktion $a \mapsto ab - \frac{a^p}{p}$. Für b) setzen Sie $a = \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p}$ und $b = \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_p}$ falls $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Für c) schreiben Sie

$$\sum i = 1^d |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i| x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{d} |y_i||x_i + y_i|^{p-1}.$$

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Welche der folgenden sind metrische Räume?

(a) $(\mathbb{R}, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x, y) = 0$ falls $x = y$ und $\mathrm{d}(x, y) = 1$ falls $x \neq y$.

(b) $(C([0,1]), \mathrm{d}_\infty)$, wobei $\mathrm{d}_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.

(c) $(\{0,1\}^{2017}, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x, y)$ die Anzahl unterschiedlicher Ziffern von x und y bezeichnet.

(d) $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d})$, wobei $\mathrm{d}(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$.

2. Gegeben ist der metrische Raum (X, d), wobei $X = (0, \infty)$ und $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$. Die Teilmenge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ ist

(a) offen.

(b) zusammenhängend.

(c) abgeschlossen.

Bitte wenden!

3. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

(b) Der Durchschnitt von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

(c) Die Vereinigung von endlich vielen offenen Mengen ist offen.

(d) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y_1, Y_2 \subseteq X$. Welche der folgenden Aussagen stimmen im Allgemeinen?

(a) $\overline{Y_1 \cup Y_2} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$.

(b) $\overline{Y_1 \cap Y_2} = \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$.

(c) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \subseteq \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$.

(d) $\overline{Y_1 \cap Y_2} \supseteq \overline{Y_1} \cap \overline{Y_2}$.

5. Der Abschluss der Menge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik ist

(a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

(c) $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$

(d) $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Siehe nächstes Blatt!

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 6. März 2017 um 13:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 3. März 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 3. März 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.