Übungsblatt 4

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der abgeschlossene Ball

$$\{x \in X \mid \mathrm{d}(x, x_0) \leq r\}$$

mit Radius $r > 0$ um $x_0 \in X$ tatsächlich eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(Y_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von zusammenhängenden Teilräumen von X. Zeigen Sie, dass falls ihr Schnitt $\bigcap_{i\in I} Y_i$ nicht-leer ist, dann ist die Vereinigung $\bigcup_{i\in I} Y_i$ zusammenhängend.

3. Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V und sei $A : V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir definieren die Norm von A als

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{x\in V \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\| .$$

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_M$ eine Norm auf $\mathrm{End}(V)$, dem Vektorraum der Endomorphismen von V, definiert.

b) Sei nun $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ und (A_{ij}) die Matrix von A bezüglich der Standardbasis. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_M = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

gilt.

c) Sei nun $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Berechnen Sie $\left\|\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\|_M$ und $\left\|\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\|_M$. Wir identifizieren hier die lineare Abbildung mit ihrer Matrix bezüglich der Standardbasis.

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subset X$ nicht-leer. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$x \in X \mapsto \mathrm{d}(x, A) = \inf_{a\in A} \mathrm{d}(x, a)$$

stetig ist.

Bitte wenden!

5. Sei (Z, d) ein metrischer Raum und seien $X, Y \subset Z$ abgeschlossen. Wir nehmen an, dass $X \cap Y$ und $X \cup Y$ beide zusammenhängend sind. Folgt dann auch, dass X und Y zusammenhängend sind?

6. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right\} \cup \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\right\}$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Die Vereinigung von endlich vielen kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes ist kompakt.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Der metrische Raum $X = (0, 1)$ mit der Metrik $\mathrm{d}(x, y) = |y - x|$ ist vollständig.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

3. Jeder vollständige metrische Raum ist kompakt.

(a) Wahr.

(b) False.

4. Der metrische Raum $C([0, 1])$ mit der Metrik $\mathrm{d}(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$ ist vollständig.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Ein Punkt $x_0 \in A$ heisst innerer Punkt von A, wenn es eine offene Teilmenge $U \subseteq A$ gibt, sodass $x_0 \in U$. Wir definieren das Innere von A als

$$A^\circ = \{x_0 \in A \mid x_0 \text{ ist ein innerer Punkt von } A\}.$$

Wenn das Innere A° von A nicht-leer ist. Dann gilt $\mathrm{d}(x, A^\circ) = \mathrm{d}(x, A)$ für alle $x \in X$

(a) Wahr.

(b) Falsch.

6. Jeder Unterraum eines kompakten Raumes ist kompakt.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $[0, 1)$ ist offen in $[0, 2]$.

(b) $[0, 1)$ ist abgeschlossen in $[0, 2]$.

(c) $(0, 1]$ ist offen in $[0, 2]$.

(d) $(0, 1]$ ist abgeschlossen in $[0, 2]$.

(e) $\mathbb{N}$ ist offen in $\mathbb{Q}$.

(f) $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{Q}$.

(g) $O = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1,\ z = 0 \right\}$ ist offen in $\mathbb{R}^3$.

Bitte wenden!

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.

- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 13. März 2017 um 13:00.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 10. März 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.

- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 10. März 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.