Übungsblatt 5

1. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem (das heisst eine Basis des Lösungsraums) für die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = u' = Au,$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$u' = Au, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (Sie müssen Spezialfälle, die durch das Verschwinden von gewissen Ausdrücken im Lösungsverfahren entstehen, nicht weiter untersuchen):

a) $(x^2 - x)y' = y^2 + y$

b) $y' + e^y = 1$

3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A, B : I \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildungen. Sei $t \in I$. Zeige

a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(A(t)B(t)\right) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t)$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} A(t)^{-1} = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}\,, \quad \text{falls } A(t) \text{ invertierbar ist.}$$

Bitte wenden!

4. Seien $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = x + t \quad x(t_0) = x_0 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem für alle t_0, x_0 eine eindeutige Lösung hat.

b) Für eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ definieren wir die n-te Picard-Iterierte mit Anfangsfunktion $x^{(0)}(t)$ rekursiv durch

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x^{(n-1)}(s))\, \mathrm{d}s \text{ für } n \geq 1$$

Bestimmen Sie die n-te Picard-Iterierte mit der konstanten Funktion $x^{(0)}(t) = x_0$ als Anfangsfunktion.

c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems. Konvergiert die Picard-Iteration gleichmässig gegen die Lösung?

5. Zeigen Sie, dass es für jedes $g \in C([0,1])$ ein $f \in C([0,1])$ mit

$$f(x) - \int_0^x e^{-y} f(y)\, \mathrm{d}x = g(x)$$

gibt.

6. (Stabilität einer Senke) Betrachten Sie die autonome Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$, wobei $f : U \to \mathbb{R}^2$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $0 \in U$,

$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \\ &f(x) = Ax + o(\|x\|) \text{ für } x \to 0 \\ &A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Nehmen Sie ausserdem an, dass die Voraussetzungen von der Existenz und Eindeutigkeit von Picard-Lindelöf erfüllt sind. Sei $x : I \to \mathbb{R}^2$ eine maximale Lösung

a) Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Zeigen Sie, dass es um den Nullpunkt einen Attraktivitätsbereich gibt, d.h. eine Umgebung U von Null, sodass folgendes gilt: wenn $x(t_0) \in U$ für ein $t_0 \in I$, dann gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda < 0$. Zeigen Sie, dass es um den Nullpunkt einen Attraktivitätsbereich gibt.

Siehe nächstes Blatt!

Hinweise zu den Aufgaben:

5. Wenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz auf eine geeignete Abbildung $H : C([0,1]) \to C([0,1])$ an.

6. Definieren Sie die Hilfsfunktion $H(x) := \|x\|^2$.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Wir betrachten die Differentialgleichung $\dot{x} = x^2 + t$ mit Anfangswert $x(0) = 0$. Welche der Aussagen gilt?

(a) Es existiert eine eindeutige Lösung (auf dem maximalen Existenzintervall).

(b) Picard-Iteration mit Anfangsfunktion $x^{(0)}(t) = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= t^2/2 \\ x^{(2)}(t) &= t^2/2 + t^5/20 \\ &\cdots \end{aligned}$$

(c) Betrachten wir ein genügend kleines Intervall um 0, so konvergiert die Picard-Iteration gleichmässig gegen die Lösung des Anfangswertproblems.

2. Sei $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

in $\mathbb{R}^n$, wobei A eine (konstante reelle) $n \times n$-Matrix ist. Welche der Aussagen gilt?

(a) Ist A nilpotent, d.h. es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $A^N = 0$, so gilt

$$\|\mathbf{x}(t)\| = O\left(t^{N-1}\right) \quad (t \to \infty)\ .$$

(b) Ist A als komplexe Matrix diagonalisierbar und λ ihr Eigenwert mit grösstem Realteil, so gilt

$$\|\mathbf{x}(t)\| = O\left(e^{\operatorname{Re}\lambda t}\right) \quad (t \to \infty)\ .$$

Bitte wenden!

3. Welches der folgenden Differentialgleichungssysteme ist zu der Differentialgleichung $y'' + y' + y = 1$ äquivalent?

(a)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2 + 1 \\ -z_1 - z_2 + 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2 \\ -z_1 - z_2 + 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$z_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2 z_1 \\ -z_1^2 - z_2 z_1 + z_1 \end{pmatrix}$$

4. Für welche der folgenden Differentialgleichungen ist der Raum der Lösungen ein Vektorraum?

(a) $y' + y = 0$

(b) $y'' + y' + y = 0$

(c) $y' = 1$

5. Für welche der folgenden Differentialgleichungen sind Produkte von Lösungen wieder Lösungen?

(a) $y' + y = 0$

(b) $y' = 1$

(c) $y' = 0$

6. Welche der folgenden Probleme haben eine eindeutige Lösung auf ganz $\mathbb{R}$?

(a) $y'' + y' + y = 0$ mit $y(0) = y'(0) = 0$

(b) $y'' = -y$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = y'(\pi) = 1$.

(c) $y' = 1$

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 20. März 2017 um 13:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 17. März 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 17. März 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.