D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis II — FS 2017

Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 6

1. Finden Sie alle Punkte, in welchen f differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen:

a) $f(x,y) = |xy|$.

b) $f(x,y) = 3x^2y - 2e^{x^2y} + 2x + 3$.

2. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x-y, xy^2), \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = (e^{x^2y}, \sin x \cos(y^2)). \end{aligned}$$

Geben Sie die Abbildung $g \circ f$ an und berechnen Sie unter Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel die Ableitung $D_{(x,y)}(g \circ f)$.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass $\partial_{xy} f$ und $\partial_{yx} f$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind.

c) Zeigen Sie, dass $\partial_{xy} f(0,0) = -\partial_{yx} f(0,0) = 1$ gilt.

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \\ (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen von f nicht überall stetig sind.

Bitte wenden!

5. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ für alle } (x, y) \in U.$$

Unter welchen Bedingungen an U hängt die Funktion f nur von x ab? D.h. wann existiert eine reellwertige Funktion g von nur einer Variablen mit

$$f(x, y) = g(x) \text{ für alle } (x, y) \in U?$$

Finden Sie ein Beispiel einer offenen, zusammenhängenden Menge U und einer Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ wie oben, für welche keine solche Funktion g existiert.

6. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Wir sagen, dass ein Weg (d.h. eine stetige Abbildung) $\gamma : [0, 1] \to U$ stückweise differenzierbar ist, falls es eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ von $[0, 1]$ gibt, sodass für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Einschränkung $\gamma_{|[t_{k-1}, t_k]}$ differenzierbar ist.

a) Zeigen Sie, dass es zu je zwei Punkten $x, y \in U$ einen stückweise differenzierbaren Weg von x nach y gibt.

Definieren Sie die Länge eines stückweise differenzierbaren Weges wie oben als

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(s)\| \, \mathrm{d}s.$$

Wir behaupten, dass die Wegmetrik $\mathrm{d}_{\text{Weg}}(x, y)$ für $x, y \in U$, welche durch

$$\mathrm{d}_{\text{Weg}}(x, y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein stückweise differenzierbarer Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

definiert ist, tatsächlich eine Metrik ist und dass diese die übliche Topologie definiert.

b) Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit beschränkten Ableitungen. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist, wenn man U mit der Wegmetrik $\mathrm{d}_{\text{Weg}}(x, y)$ ausstattet.

c) Finden Sie ein Beispiel einer zusammenhängenden, nicht konvexen Menge und einer differenzierbaren Funktion mit beschränkten Ableitungen, die bezüglich $\|\cdot\|$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Hinweise zu den Aufgaben:

5. Betrachten Sie die vertikalen Schnitte $U_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in U\}$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & x \neq 0 \\ y^2 & x = 0 \end{cases} .$$

Welche der folgenden Mengen ist die Menge der Stetigkeitsstellen von f?

(a) $\mathbb{R}^2$

(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \}$

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \} \cup \{(0,0)\}$

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2 + y^2$. In welche Richtung $v = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ ist die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,1)$ maximal?

(a) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

(b) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

(c) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$

Bitte wenden!

3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Funktion. Es gibt also eine $n \times n$-Matrix A mit $f(x) = Ax$. Was folgt für ihr Differential?

(a) $D_x f = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $D_x f = A$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) $D_x f = \mathrm{Id}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei Id die Einheitsmatrix bezeichnet.

(d) $D_x f = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(e) $D_x f = A$ für mindestens ein $x \in \mathbb{R}^n$.

(f) $D_x f = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ bei $(0,0)$ existieren. Welche Aussagen folgen daraus?

(a) $x \mapsto f(x,0)$ ist stetig bei 0.

(b) $x \mapsto f(x,-x)$ ist stetig bei 0.

(c) $x \mapsto f(x,2x)$ ist differenzierbar bei 0.

(d) f ist stetig.

(e) f ist stetig bei 0.

5. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(a) Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lässt sich die Stetigkeit im Allgemeinen **nicht** auf den Fall $m = 1$ reduzieren, da es im $\mathbb{R}^m$ viele mögliche Richtungen der Bewegung gibt.

(b) Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lässt sich die Stetigkeit im Allgemeinen **nicht** auf den Fall $n = 1$ reduzieren, da es im $\mathbb{R}^n$ viele mögliche Richtungen der Bewegung gibt.

Siehe nächstes Blatt!

6. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(a) Falls eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar ist, so sind auch alle Koordinatenfunktionen $f_k = \pi_k \circ f$ differenzierbar.

(b) Falls für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ alle Koordinatenfunktionen $f_k = \pi_k \circ f$ differenzierbar sind, dann ist auch f differenzierbar.

(c) Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar ist, dann existieren die partiellen Ableitungen.

(d) Falls die partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existieren, dann ist f differenzierbar.

7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) = 1.$$

Sei $g(s,t) = f(s+t, e^{s+t} + t)$. Was ist der Wert von $\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(0,0)$?

(a) 1

(b) 3

(c) 5

(d) 7

(e) 9

(f) Der Wert von $\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(0,0)$ ist durch die gegebenen Werte nicht eindeutig bestimmt.

Bitte wenden!

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 27. März 2017 um 13:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 24. März 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 24. März 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.