Übungsblatt 7

1. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 - y^3 - xy$$

und entscheiden Sie, ob diese lokale Extrema sind.

2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Ein kritischer Punkt $\mathbf{x}$ von f heisst *degeneriert*, falls $\det(\partial_{ij} f(\mathbf{x})) = 0$ ist.

a) Beweisen Sie, dass jeder nicht degenerierte kritische Punkt von f eine Umgebung hat, die keine weiteren kritischen Punkte enthält.

b) Geben Sie ein f an, sodass in jeder Umgebung eines kritischen Punktes ein weiterer kritischer Punkt existiert.

3. Sei $m \geq 1$ und seien $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|^2$ genau einen kritischen Punkt hat und dort ein globales Minimum annimmt.

4. Ermitteln Sie die Taylorreihe von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ an der Stelle $(0, 0)$.

5. a) Leiten Sie für $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ den Multinomialsatz

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^k = \sum_{\|\alpha\|_1 = k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$$

her, wobei $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$ einen n-dimensionalen Multi-Index bezeichnet und $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ gilt.

Bitte wenden!

b) Finden Sie eine Reihendarstellung für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

und zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert.

6. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene, zusammenängende Teilmenge und sei $f : U \to (0, \infty)$ stetig. Definieren Sie in Analogie zu Übung 11.20 im Skript oder Aufgabe 6 der Serie 6 eine Metrik auf U über die von f gegebene inverse Höchstgeschwindigkeit, das heisst

$$\mathrm{d}(x, y) = \inf\left\{ \int_0^1 f(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathrm{d}t \mid \gamma : [0, 1] \to U \text{ stückweise differenzierbar} \right.$$
$$\left. \text{mit } \gamma(0) = x \text{ und } \gamma(1) = y \right\}.$$

Zeigen Sie, dass dies tatsächlich eine Metrik auf U definiert und dass diese Metrik die Standardtopologie induziert.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Welche der Aussagen gilt?

(a) Es existiert $\xi \in \mathbb{R}\mathbf{v}$ mit

$$f(\mathbf{v}) - f(-\mathbf{v}) = 2 D_\xi f \mathbf{v} \ .$$

(b) Es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| \leq 1$ und

$$f(\mathbf{v}) - f(-\mathbf{v}) = 2 D_{\lambda \mathbf{v}} f \mathbf{v} \ .$$

(c) Sei $\mathbf{w} \notin \mathbb{R}\mathbf{v}$. Dann existiert $\lambda \in [0, 1]$ mit

$$f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) = D_{\lambda \mathbf{v} + (1-\lambda)\mathbf{w}} f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \ .$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Das Wegintegral der Funktion $f(x,y) = x + y$ über den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ hat den Wert

(a) 0

(b) $1 - \sqrt{2}$

(c) 1

(d) $1 + \sqrt{2}$

3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\mathbf{x}) = x_1^3 x_3 - x_2 x_3^5$. Welche der Aussagen gilt?

(a) f hat ein globales Extremum.

(b) f hat ein lokales Extremum im Ursprung.

(c) f nimmt in der abgeschlossenen Kugel $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 |\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2\}$ ein Extremum an.

4. Welche der folgenden Polynome sind Taylor-Polynome zur Funktion $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$ bezüglich dem Nullpunkt?

(a) x

(b) 0

(c) $x + y$

(d) xy

(e) y

Bitte wenden!

5. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Funktionen sind Potentiale von f?

(a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$

(c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = 8$

(d) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$

(e) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.

- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 3. April 2017 um 13:00.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 31. März 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.

- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 31. März 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.