Übungsblatt 8

1. Zeigen Sie, dass ein stetiges Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}$ auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ ist, wenn für jede stückweise stetig differenzierbare Schlaufe γ in U gilt $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{s} = 0$.

2. Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $\Phi(x, y, z)$ ist das Vektorfeld

$$(x, y, \Phi(x, y, z))$$

ein Gradientenfeld im $\mathbb{R}^3$? Bestimmen Sie in diesen Fällen eine Potentialfunktion.

3. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xy^5 + yu^5 + zv^5 &= 1 \\ x^5y + y^5u + z^5v &= 1 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x, y, z, u, v) = (0, 1, 1, 1, 0)$ nach $u = f_1(x, y, z)$ und $v = f_2(x, y, z)$ auflösbar ist und berechnen Sie $D_{(0,1,1)}\mathbf{f}$, wobei $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^t$.

4. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{xy} \sin(x^2 - y^2 + x) &= 0 \\ e^{x^2+y} \cos(x^2 + y^2) &= 1 \end{aligned}$$

besitzt die Lösung $x = y = 0$. Zeigen Sie, dass $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle ξ, η mit $\xi^2 + \eta^2 < \varepsilon$ das gestörte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{xy} \sin(x^2 - y^2 + x) &= \xi \\ e^{x^2+y} \cos(x^2 + y^2) &= 1 + \eta \end{aligned}$$

eine Lösung $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ besitzt, welche stetig von der Störung (ξ, η) abhängt.

Bitte wenden!

5. Sei $n \geq 2$ und $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rekursiv gegeben durch

$$f_2(r, \vartheta_1) = \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta_1) \\ r\sin(\vartheta_1) \end{pmatrix}$$

und

$$f_n(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) = \begin{pmatrix} f_{n-1}(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2})\cos(\vartheta_{n-1}) \\ r\sin(\vartheta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie f_4 explizit an.

b) Zeigen Sie, dass
$$\|f_n(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1})\| = |r|$$
gilt.

c) Zeigen Sie, dass alle partiellen Ableitungen $\partial_r f_n$, $\partial_{\vartheta_i} f_n$ für $i = 1, \ldots, n-1$ paarweise orthogonal zueinander sind.

d) Definieren Sie
$$U_n := \left\{(r, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid r > 0, |\vartheta_1| < \pi, |\vartheta_i| < \tfrac{\pi}{2} \text{ für } i = 2, \ldots, n-1\right\}$$
und
$$V_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 \neq 0 \text{ oder } x_1 > 0\}.$$
Zeigen Sie, dass $V_n = f_n(U_n)$ gilt und die Einschränkung $f_n : U_n \to V_n$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

6. a) Zeigen Sie, dass die Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ wegzusammenhängend ist.

b) Betrachten Sie die folgende Metrik auf $\mathbb{S}^2$ (vgl. Übungsblatt 6, Aufgabe 6), wobei nur Wege von einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ nach $\mathbb{S}^2$ betrachtet werden:
$$\mathrm{d}(x, y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist ein stückweise differenzierbarer Weg von } x \text{ nach } y\}.$$
Zeigen Sie, dass der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{S}^2$ mit $x \neq y$ auf einem Grosskreis liegt.

Bemerkung: Ein Grosskreis ist der Durchschnitt von $\mathbb{S}^2$ mit einer Ebene durch den Ursprung.

Hinweise zu den Aufgaben:

5. Argumentieren Sie jeweils mit vollständiger Induktion über n.

6. $\mathbb{S}^2$ hat grosse Symmetrie und man kann dies zur Vereinfachung der Notation ausnutzen.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $c \in \mathbb{R}$ und $A_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + c\}$. Welche der folgenden Aussagen gelten?

(a) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass A_c der Graph einer Funktion $f(x_1, x_2)$ ist.

(b) Für jedes $c > 0$ und jedes $\mathbf{x} \in A_c$ existiert eine Umgebung U von $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^3$, so dass $U \cap A_c$ der Graph einer Funktion $f(x_1, x_2)$ ist.

(c) Aus dem Satz von der impliziten Funktion folgt, dass für jedes $c < 0$ und jedes $\mathbf{x} \in A_c$ eine Umgebung U von $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^3$ existiert, so dass $U \cap A_c$ der Graph einer Funktion $f(x_1, x_2)$ ist.

2. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x+y) + e^z \sin w &= 0 \\ x + y + z^2 &= 0\ . \end{aligned}$$

Kann mit Hilfe des Satzes von der impliziten Funktion dieses Gleichungssystem so aufgelöst werden, dass ...

(a) ... x eine Funktion von (y, z, w) ist in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$?

(b) ... x und y Funktionen von (z, w) sind in einer Umgebung von $(0, 0)$?

(c) ... x und z Funktionen von (y, w) sind in einer Umgebung von $(0, 0)$?

(d) ... x und w Funktionen von (y, z) sind in einer Umgebung von $(0, 0)$?

3. Kann man die Gleichung $x^2 + (y-1)^2 = 1$ in einer Umgebung von $(1, 1)$ nach x auflösen?

(a) Ja.

(b) Nein.

Bitte wenden!

4. Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben durch $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Welche der folgenden Aussagen gelten?

(a) $\mathbf{f}$ ist bijektiv.

(b) $\mathbf{f}_{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist ein C^∞-Diffeomorphismus.

(c) Für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existiert eine offene Umgebung V, so dass $\mathbf{f}_{|V} : V \to \mathbf{f}(V)$ bijektiv und die Inverse C^∞ ist.

5. Welche der folgenden Vektorfelder im $\mathbb{R}^2$ sind Gradientenfelder?

(a) $(x, -y)$

(b) $(y, -x)$

(c) (y, x)

6. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^1-Funktion, sodass $D_x f$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Folgt dann, dass es eine differenzierbare Inverse g gibt?

(a) Ja.

(b) Nein.

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 10. April 2017 um 13:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 7. April 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 7. April 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.