D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Analysis II FS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

# Übungsblatt 9

**1.** Bestimmen Sie alle globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$
$$g_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

**2.** a) Zeigen Sie, dass jede nulldimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ definiert und bestimmen Sie deren Dimension.

**3.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y, z) = x(x - 1) + y^2 + z^2.$$

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $M_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y, z) = \alpha\}$. Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert dies mit Hilfe des Satzes über den konstanten Rang eine Teilmannigfaltigkeit?

b) Ist $M_\alpha$ auch für die verbleibenden Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Teilmannigfaltigkeit?

**4.** Seien $a, b, c > 0$ gegeben. Bestimmen Sie den achsenparallelen Quader grössten Volumens, der dem Ellipsoid

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

eingeschrieben ist.

**Bitte wenden!**

**5.** Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen keine Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ sind:

a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$,

b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - x^4 = 0\}$.

**6.** Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\right\}$$

eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ definiert und berechnen Sie deren Dimension.

**Hinweise zu den Aufgaben:**

**6.** Definieren Sie die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = A^t A - I_n$$

und die Projektion

$$p : \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \to R = \{B \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \mid B_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}.$$

Betrachten Sie anschliessend die Abbildung $F = p \circ \varphi : \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbb{R}) \to R$.

**Siehe nächstes Blatt!**

**7. Multiple-Choice Fragen** (Mehrere Antworten können richtig sein!)

**1.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x + y)^2$, und $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$. Welche der Aussagen gilt?

(a) $f_{|K}$ hat genau zwei lokale Minimalstellen.

(b) $f_{|K}$ hat genau zwei lokale Maximalstellen.

(c) Die Steigung der Tangente an $K$ in den lokalen Minimalstellen ist $-1$.

(d) Die Steigung der Tangente an $K$ in den lokalen Maximalstellen ist $-1$.

**2.** Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(x - 1)^2\}$. Welche der Aussagen gelten?

(a) $M$ ist der Graph einer Funktion.

(b) Sei $(x, y) \in M$ mit $y \neq 0$. Dann existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \in U$, so dass $M \cap U$ der Graph einer $C^\infty$-Funktion ist.

(c) $M$ ist eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$.

**3.** Sei $f(x, y, z) = x$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Wir suchen ein Maximum von $f$ auf $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Dieses liegt bei $(1, 0, 0)$ und des Weiteren gilt $D_{(1,0,0)}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist dort das Differential nicht null. Ist dies ein Widerspruch?

(a) Nein.

(b) Ja.

**4.** Sei $g(x,y) = x^2 + (y - \frac{1}{4})^2 - 1$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, g(x,y) = 0\}$ und $f(x,y) = y$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sei $(x_0, y_0)$ das Minimum von $f$ auf $D$. Folgt dann, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $D_{(x_0,y_0)} f - \lambda D_{(x_0,y_0)} g = 0$?

(a) Nein.

(b) Ja.

**Bitte beachten Sie die abweichenden Abgabefristen!**

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 24. April 2017 um 13:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Montag, 24. April 2017 bis 08:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Montag, 24. April 2017 vor 11:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.