D-MATH, D-PHYS, D-CHAB | Analysis II | FS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 10

1. Zeigen Sie, dass die Cantormenge eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist.

2. Bestimmen Sie alle globalen Extrema von $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ auf

a) der Einheitssphäre $\mathbb{S}^1 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,

b) der Scheibe $D = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Seien $s_i > 0$ mit $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = 1$ und $a_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, wie die Ungleichung

$$a_1^{s_1} a_2^{s_2} \ldots a_n^{s_n} \leq s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_n a_n$$

aus einem Extremwertproblem mit Nebenbedingung folgt.

4. Betrachten Sie die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 y$ und die Zerlegung

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2) \text{ mit } \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = \{0, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{n-1}{n}, 1\}$$

von $[0,1]^2$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

a) Berechnen Sie die Untersumme $U(f, \mathfrak{Z})$ und die Obersumme $O(f, \mathfrak{Z})$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf $[0,1]^2$ Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y) \, \mathrm{d}vol$$

Sie dürfen dabei nur Sätze aus dem Skript in und vor Abschnitt 13.1 verwenden.

Bitte wenden!

5. Sei Q ein abgeschlossener, n-dimensionaler Quader und $N \subseteq Q$. Sei $U \supseteq Q$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, sodass das Bild $\varphi(Q)$ eines abgeschlossenen Quaders Q in einem Quader enthalten ist, dessen maximale Seitenlänge höchstens L-mal so lang ist wie die maximale Seitenlänge von Q.

b) Wir nennen Q *würfelähnlich*, falls (mit der Notation wie in Abschnitt 13.1)

$$\max_{k=1,\dots,n}(b_k - a_k) \leq 2 \min_{k=1,\dots,n}(b_k - a_k).$$

Zeigen Sie, dass man in der Definition von Nullmengen anstelle von offenen Quadern auch abgeschlossene, würfelähnliche Quader betrachten kann.

c) Zeigen Sie, dass $\varphi(N)$ eine Nullmenge ist, falls N eine Nullmenge ist.

6. a) Konstruieren Sie eine offene Menge U (zum Beispiel in $\mathbb{R}$), für welche der Rand ∂U keine Nullmenge ist.

b) Konstruieren Sie eine zusammenhängende offene Menge $W \subset \mathbb{R}^2$, für welche ∂W keine Nullmenge ist.

Hinweise zu den Aufgaben:

3. Betrachten Sie für gegebene $s_1, \dots, s_n$ die Menge

$$M = \{(a_1, \dots, a_n) \in (0, \infty)^n \mid s_1 a_1 + \dots + s_n a_n = 1\}$$

und maximieren Sie $f(a_1, \dots, a_n) = a_1^{s_1} \dots a_n^{s_n}$.

5. a) Zeigen Sie zunächst, dass φ auf Q Lipschitz-stetig ist.

6. a) Sei $\{a_1, a_2, \dots\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0, 1]$. Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ definieren wir $I_n = (a_n - \varepsilon 2^{-(n+1)}, a_n + \varepsilon 2^{-(n+1)})$ und $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Zeigen Sie, dass $[0, 1] \setminus U \subset \partial U$ gilt und ∂U keine Nullmenge ist.

b) Sei $U \subset (-1, 2) \subset \mathbb{R}$ die Menge aus dem Hinweis zu Teilaufgabe a). Betrachten Sie dann den "Kamm" $W = (U \times [0, 1)) \cup ((-1, 2) \times (-1, 0))$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Die Menge $P = \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Welche der Mengen ist Jordan-messbar?

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq \|y\|\}$

(b)

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n \in \mathbb{N} \ & \min\{a_n, a_{n+1}\} \leq x \leq \max\{a_n, a_{n+1}\} \\ & \min\{b_n, b_{n+1}\} \leq y \leq \max\{b_n, b_{n+1}\}\} \end{aligned}$$

für reelle Folgen (a_n), (b_n), so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergieren.

(c) $([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^2$

3. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der Aussagen gelten im Allgemeinen?

(a) Ist E beschränkt, aber nicht Jordan-messbar und f konstant, so ist f über E integrierbar.

(b) Ist f über E integrierbar und A eine Teilmenge von E, so ist $f_{|A}$ über A integrierbar.

Bitte wenden!

4. Welche der folgenden Mengen sind Teilmannigfaltigkeiten?

(a) $M = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x, y, z) = 0$ und $f_2(x, y, z) = 0\}$, wobei

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ f_2(x, y, z) &= \tfrac{1}{3}x^2 + 2y^2 - z - 1. \end{aligned}$$

(b) $M = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x, y, z) = 0$ und $g_2(x, y, z) = 0\}$, wobei

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ g_2(x, y, z) &= \tfrac{1}{3}x^2 + 2y^2 - z - 2. \end{aligned}$$

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.

- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 1. Mai 2017 um 13:00.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 28. April 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.

- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 28. April 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.