# Übungsblatt 11

**1.** Berechnen Sie das Integral
$$\int_A xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
wobei $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le y \le z \le 1\}$ ist.

**2.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen über Jordan-Nullmengen:

a) Die Cantormenge $C \subseteq [0,1]$ ist eine Jordan-Nullmenge.

b) Sei $(x_k)$ eine konvergente Folge im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge der Folgenglieder $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Jordan-Nullmenge ist.

**3.** Sei $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $\mathcal{J}$ ist eine Jordan-Nullmenge.

(ii) $\mathcal{J}$ ist Jordan-messbar und $\mathrm{vol}(\mathcal{J}) = 0$.

(iii) $\overline{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \cup \partial\mathcal{J}$ ist beschränkt und eine Lebesgue-Nullmenge.

**4.** Kehren Sie in folgenden Beispielen die Integrationsreihenfolge um:

a) $\int_{-1}^{2} \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{4-|z|}}^{\sqrt{4-|z|}} \int_{-\sqrt{4-y^2-|z|}}^{\sqrt{4-y^2-|z|}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

**5.** Sei $\delta > 0$. Bestimmen Sie das Volumen der Menge
$$A = \{\mathbf{x} \in [0,1]^n \mid \forall i \neq j\ ,\ |x_i - x_j| \ge \delta\}\,.$$

**Bitte wenden!**

**6.** Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Jordan-messbar und

$$C = \bigcup_{\mathbf{a} \in A \times \{0\}} \{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{v} \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

der Körper in $\mathbb{R}^n$ mit Grundfläche $A \times \{0\}$ und Spitze $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $C$ Jordan-messbar ist und $\operatorname{vol}(C) = \frac{|v_n|}{n} \operatorname{vol}(A)$ gilt.

**Hinweise zu den Aufgaben:**

**5.** Berechnen Sie das Volumen von $A \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}$. Zeigen Sie dann, dass das Volumen von $A$ das $n!$-fache dieses Volumens ist.

**6.** Beginnen Sie mit einem Quader $A = Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.

**7. Multiple-Choice Fragen** (Mehrere Antworten können richtig sein!)

**1.** Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $\int_0^2 \left( \int_{y^3}^{4(2y)^{1/2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ gleich

(a) $\int_0^8 \left( \int_{x^{1/3}}^{x^2/32} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

(b) $\int_0^8 \left( \int_{x^2/32}^{x^{1/3}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

(c) $\int_{x^3}^{4(2x)^{1/2}} \left( \int_0^2 f(y,x)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

**2.** Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Das Bild einer Jordan-Nullmenge unter einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist wieder eine Jordan-Nullmenge.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Das Bild einer Lebesgue-Nullmenge unter einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge.

(c) Der Abschluss einer Jordan-Nullmenge ist wieder eine Jordan-Nullmenge.

(d) Der Abschluss einer Lebesgue-Nullmenge ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge.

(e) Keine der Aussagen.

**Siehe nächstes Blatt!**

**3.** Wir möchten das Volumen von

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

berechnen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Nach Anwendung vom Satz von Fubini ist der Integrationsbereich der inneren beiden Integrale ein Quadrat, welches wir leicht berechnen können.

(b) Der obige Durchschnitt ist eine Kugel mit Radius $1$, wovon wir das Volumen leicht berechnen können.

(c) Da $x_2$ in beiden Ausdrücken vorkommt, integrieren wir zuerst über $x_2$ und anschliessend über $x_1$ und $x_3$.

(d) Das Volumen dieses Körpers ist $16/3$.

(e) Das Volumen dieses Körpers ist $4/3\pi$.

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 8. Mai 2017 um 13:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 5. Mai 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 5. Mai 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.