Übungsblatt 12

1. Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. Wandeln Sie die beiden gesuchten Ausdrücke in iterierte eindimensionale Integrale, welche wir mit den Methoden aus dem ersten Semester bequem berechnen können, um und berechnen Sie eines der beiden Integrale.

a) $\int_B xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, wobei $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

b) Das zwischen der Sphäre $x^2+y^2+z^2 = 8$ und dem Paraboloid $4z = x^2+y^2+4$ eingeschlossene Volumen.

3. Es bezeichne
$$\Delta^n = \{\mathbf{x} \in [0,1]^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 1\}$$
den n-dimensionalen Standardsimplex.

a) Berechnen Sie das Volumen von Δ^n.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{\Delta^n} e^{x_1+x_2+\ldots+x_n}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$.

4. Es seien p, q, a, b reelle Zahlen mit $0 < p < q$ und $0 < a < b$. Abschnitte der Parabeln
$$y^2 = px,\ y^2 = qx,\ x^2 = ay,\ x^2 = by$$
begrenzen ein krummlinig berandetes Viereck M in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.

5. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch positiv definit und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle.$$
Bestimmen Sie das Volumen des durch $f(\mathbf{x}) \leq 1$ beschriebenen Ellipsoids, also der Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \leq 1\}$. Hierbei darf das Volumen ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel als bekannt angenommen werden.

Bitte wenden!

6. Es bezeichne $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ die Poincaré Halbebene. Für eine kompakte, Jordan-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{H}$ definieren wir den hyperbolischen Flächeninhalt als

$$\mu_h(A) = \int_A \frac{1}{y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie, dass die Diffeomorphismen $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ der Form

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

den hyperbolischen Flächeninhalt invariant lassen, d.h. für alle Jordan-messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{H}$ gilt $\mu_h(\varphi(A)) = \mu_h(A)$.

Hinweise zu den Aufgaben:

1. Nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist das Integral einfacher.

3. Betrachten Sie für b) die Substitution $y_k = x_1 + \ldots + x_k$ für $k = 1, \ldots, n$.

4. Finden Sie einen Diffeomorphismus, der einen achsenparallelen Quader Q auf M abbildet.

7. **Multiple-Choice Fragen** (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Der Wert des Integrals

$$\int_V \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

mit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$ ist

(a) $\frac{\pi}{3}$

(b) $\frac{\pi^2}{2}$

(c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{1}{2}$

Siehe nächstes Blatt!

2. Der Wert des Integrals

$$\int_V x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

mit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ ist

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{1}{15}$

(c) $-\frac{2}{15}$

(d) π

3. Sei $0 < a < b$ und $0 < c < d$. Welche der folgenden Substitutionen sind hilfreich, um den Flächeninhalt des Gebiets

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq ye^{-x} \leq b,\ c \leq ye^{x} \leq d\}$$

zu berechnen?

(a) $\varphi(x, y) = (ye^{-x}, ye^{x})$

(b) $\varphi(x, y) = (ye^{x}, ye^{-x})$

(c) $\varphi(x, y) = (-y \log(x), y \log(x))$

Bitte wenden!

4. Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq 2x - 3y \leq 4\}$. Welche der folgenden Substitutionen sind hilfreich, um das Integral

$$\int_A \sqrt{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

zu berechnen?

(a) $\varphi(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$

(b) $\varphi(x, y) = (\sqrt{x+y}, y)$

(c) $\varphi(x, y) = (x - y, \frac{2}{3}x - y)$

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.

- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 15. Mai 2017 um 13:00.

- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 12. Mai 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.

- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 12. Mai 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.