D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis II — FS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 13

1. Berechnen Sie die Fläche des sphärischen Rechtecks, welches durch zwei Längen- und Breitengrade auf der Einheitssphäre beschränkt ist.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $f(x,y) = (x^3, 0)$ und sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$. Berechnen Sie den Fluss von f durch den Rand von B

a) mit Hilfe des Divergenzsatzes.

b) direkt als Integral über den Normalenvektor.

3. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Quader und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, offene Teilmenge, welche von den Graphen zweier glatter Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : Q \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$ beschränkt wird. Sei weiterhin $\varrho > 0$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $f(x,y,z) = (0,0,-\varrho z)$. Beweisen Sie

$$-\int_{\partial\Omega} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \varrho \operatorname{vol}(\Omega).$$

Hierbei steht $\int_{\partial\Omega} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ für das Integral über den Aussennormalenvektor. Für den oberen Rand kann dieses durch

$$\int_Q \left\langle f(x,y,\varphi_2(x,y)), \begin{pmatrix} -\partial_x \varphi_2 \\ -\partial_y \varphi_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

definiert werden.

Bemerkung: Die Aussage kann als Archimedisches Prinzip interpretiert werden: Die Auftriebskraft in einer Flüsigkeit der Dichte ϱ ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

4. Sei $A \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch positiv definit und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, \xi\rangle} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det A)^{1/2}} e^{\frac{1}{2}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle}.$$

Bitte wenden!

5. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = g(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}$$

divergenzfrei? Ein Vektorfeld f heisst divergenzfrei, falls $\operatorname{div} f = 0$ ist.

6. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $B_1^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 < 1\}$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B_1^n)} \int_{B_1^n} f(\|\mathbf{x}\|_2)\, \mathrm{d}x \longrightarrow f(1) \text{ für } n \to \infty.$$

Hinweise zu den Aufgaben:

4. Wenden Sie eine geeignete Substitution an.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = ...$

(a) $(\operatorname{div}(\nabla f) \cdot \mathbf{v} + f \operatorname{div} \mathbf{v}$

(b) $(\nabla f) \times \mathbf{v} + f \operatorname{div} \mathbf{v}$

(c) $(\nabla f) \cdot \mathbf{v} + f \operatorname{div} \mathbf{v}$

2. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ zwei gegebene Vektoren und sei f das durch $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ definierte Vektorfeld. Dann ist $\operatorname{div} f = ...$

(a) $\mathbf{a} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$

(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$

(c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$

(d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$

Siehe nächstes Blatt!

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $0 \in U$ und sei $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Wir betrachten das Oberflächenintegral

$$\int_{r\mathbb{S}^2} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$$

über $r\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{v}\| = r\}$. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen wahr?

(a) $\lim_{r\to 0} \int_{r\mathbb{S}^2} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = f(0)$

(b) $\int_{r\mathbb{S}^2} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \mathcal{O}(r)$ für $r \to 0$

(c) $\int_{r\mathbb{S}^2} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \mathcal{O}(r^2)$ für $r \to 0$

(d) $\int_{r\mathbb{S}^2} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \mathcal{O}(r^3)$ für $r \to 0$

4. Die Divergenz eines Gradientenfeldes, d.h. $\operatorname{div} \nabla f$ für ein skalares Feld f,

(a) ist immer 0.

(b) ist immer gleich dem Gradienten der Divergenz von f.

(c) ist gleich dem Laplace-Operator angewandt auf das Skalarfeld f, also Δf

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 22. Mai 2017 um 13:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 19. Mai 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 19. Mai 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.