Übungsblatt 14

In den Aufgaben 1-4 geht es um Integralberechnungen im $\mathbb{R}^3$, die verwendeten geometrischen Einsichten müssen hier nicht formal bewiesen werden.

1. Berechnen Sie $\int_S \operatorname{rot} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ mit und ohne den Satz von Stokes für $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1\}$, $\mathbf{n}$ nach aussen und $f(\mathbf{x}) = (yz, x^2, 1)$.

2. Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, sodass das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)$$

rotationsfrei wird. Bestimmen Sie nach Wahl dieser Parameter ein Potential von f.

3. Sei $0 < d < 1$ und sei S jener Teil von $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, welcher $z > -d$ erfüllt. Sei $f(x, y, z) = (-y, x, 0)^T$ und $v = \operatorname{rot} f$. Der Normalenvektor $\mathbf{n}$ zeige nach aussen. Berechnen Sie den Fluss $\int_S v \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$

a) direkt,

b) mit dem Satz von Stokes,

c) mit dem Satz von Gauss.

4. Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})$ das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = \left(\frac{2(xz + y)}{x^2 + y^2}, \frac{2(yz - x)}{x^2 + y^2}, \log\left(x^2 + y^2\right) \right)$$

und die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \\ \gamma_2 &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \varphi \mapsto (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 2)\ . \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Differenz $\int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} - \int_{\gamma_2} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ mit Hilfe des Satzes von Stokes.

b) Ist f konservativ?

Bitte wenden!

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = e^{\frac{1}{2}(y^2-x^2)}(\cos(xy), \sin(xy))$. Seien $a \in \mathbb{R}, b > 0$ und $\gamma_{a,b} : [-b,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_{a,b}(t) = (t,a)^T$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_{a,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\gamma_{0,b}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + o(1) \text{ für } b \to \infty.$$

6. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_1(0)}$ (welches nicht einfach zusammenhängend ist) und f ein rotationsfreies C^1-Vektorfeld auf Ω. Zeigen sie

$$\int_{\partial B_2(0)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \; = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \varphi\; C^2 \text{ mit } f = \nabla\varphi$$

in mehreren Schritten.

a) Die Implikation $\Leftarrow$ gilt.

b) Die Mengen $\Omega_\pm = \left\{\mathbf{x} \in \Omega \middle| \pm y < \frac{1}{2}\right\}$ sind einfach zusammenhängend.

c) Es existieren C^2-Funktionen $\varphi_\pm$ auf $\Omega_\pm$ mit $\nabla\varphi_\pm = f_{|\Omega_\pm}$. Insbesondere ist $\nabla(\varphi_+ - \varphi_-) = 0$ auf $\Omega_+ \cap \Omega_-$.

d) Die Implikation $\Rightarrow$ gilt: Konstruieren Sie φ mit Hilfe von $\varphi_\pm$.

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Welche der folgenden Vektorfelder sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich sowohl rotations- als auch divergenzfrei?

(a) $f(x,y,z) = (0,0,y)^T$.

(b) $f(x,y,z) = \frac{1}{r^3}(x,y,z)^T$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(c) $f(x,y,z) = (x,y,z)^T$.

(d) $f(x,y,z) = r^2(x,y,z)^T$ mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und sei φ eine C^2-Funktion auf $\mathbb{R}^3$. Dann gilt $\operatorname{div}(\varphi f) =$...

(a) $(\nabla\varphi) \cdot f + \varphi \operatorname{div} f$

(b) 0

(c) $\operatorname{rot} f \times \nabla\varphi$

3. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f : O \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Welche der Aussagen gilt?

(a) Falls f konservativ ist, dann ist $\operatorname{rot} f = 0$.

(b) Falls $\operatorname{rot} f = 0$ ist, dann ist f konservativ.

(c) Falls $O = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T\}$ und $\operatorname{rot} f = 0$ ist, dann ist f konservativ.

- Ein Wechsel der Übungsgruppe nach Freitag 11:00 ist erst für die Übungsstunde in der übernächsten Woche gültig. Denn wenn man ausgewählt wird, dann wird man für eine Übungsgruppe ausgewählt und muss auch zu dieser und nicht einer anderen erscheinen.
- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 29. Mai 2017 um 13:00.
- Elektronische Erklärung der Bereitschaft, eine Aufgabe vorzulösen: Freitag, 26. Mai 2017 bis 11:00 unter echo.ethz.ch.
- Abgabe der schriftlichen Lösungen zu denjenigen Aufgaben, für welche Sie sich elektronisch bereit erklärt haben: Freitag, 26. Mai 2017 vor 14:00 im Fach Ihres Übungsleiters im HG F 27 oder per E-Mail an Ihren Übungsleiter.