D-MATH, D-PHYS, D-CHAB — Analysis II — FS 2017
Prof. Manfred Einsiedler

Übungsblatt 15

1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und sei φ eine C^2-Funktion auf $\mathbb{R}^3$. Wir definieren $\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ und bezeichen mit $\nabla\varphi$ den Gradienten von φ. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

a) $\operatorname{rot}(\varphi f) = (\nabla\varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f$,

b) $\operatorname{div}(\nabla\varphi) = \Delta\varphi$,

c) $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$

a) durch direktes Nachrechnen,

b) indem Sie durch Anwenden der Sätze von Gauss und Stokes zeigen, dass

$$\int_B \operatorname{div} \operatorname{rot} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0$$

für jeden Ball $B \subseteq \mathbb{R}^3$.

3. Beweisen Sie

$$\int_D (f\Delta g - g\Delta f)(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial D} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} \, .$$

Hier ist $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränkter Bereich mit glattem Rand, $\mathbf{n}$ das nach aussen zeigende Einheitsnormalenvektorfeld von ∂D und f, g sind C^2-Funktionen auf einer offenen Umgebung von $\overline{D}$.

Bitte wenden!

4. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein glatt berandeter Bereich und sei U eine offene Obermenge von B. Betrachten Sie eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F : (p,t) \in U \times \mathbb{R} \mapsto F(p,t) \in \mathbb{R}$, womit also F eine Funktion in drei "Ortsvariablen" $p = (x,y,z)$ und einer "Zeitvariable" t ist. Weiter schreiben wir $\Delta_p F = \partial_x^2 F + \partial_y^2 F + \partial_z^2 F$. Angenommen F genügt der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 F(p,t) &= \Delta_p F(p,t) \text{ für alle } (p,t) \in B \times \mathbb{R}, \\ F(p,t) &= 0 \text{ für alle } (p,t) \in \partial B \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Energiefunktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch

$$E(t) = \int_B \left((\partial_t F(p,t))^2 + (\partial_x F(p,t))^2 + (\partial_y F(p,t))^2 + (\partial_z F(p,t))^2 \right) \mathrm{dvol}(p)$$

für $t \in \mathbb{R}$ konstant ist. Nehmen Sie entweder an, dass $B = Q$ ein Quader ist, oder verwenden Sie ohne Beweis die Verallgemeinerung des Satzes über Parameterintegrale für B.

5. Sei $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Definieren Sie das Vektorfeld $f_A := A \circ f \circ A^{-1}$.

a) Beweisen Sie $\mathrm{div}(f_A)(p) = \mathrm{div}(f)(A^{-1}p)$ für alle $p \in \mathbb{R}^3$.

b) Beweisen Sie $\mathrm{rot}(f_A)(p) = \mathrm{rot}(f)(A^{-1}p)$ für alle $p \in \mathbb{R}^3$, falls $A \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

6. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Definieren Sie die Funktion $F_A := F \circ A^{-1}$.

a) Beweisen Sie $(\Delta F_A)(p) = (\Delta F)(A^{-1}p)$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$.

b) Bestimmen Sie die maximale Untergruppe

$$H = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid (\Delta F_A)(p) = (\Delta F)(A^{-1}p) \text{ für alle } p \in \mathbb{R}^n \\ \text{und } C^2\text{-Abbildungen } F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ C^2\}.$$

Siehe nächstes Blatt!

7. Multiple-Choice Fragen (Mehrere Antworten können richtig sein!)

1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und f eine C^1-Funktion auf einer Umgebung von $\overline{D}$, die in D harmonisch ist, d.h. es gilt $\Delta f = 0$ in D. Welche der Aussagen gilt?

(a) $\int_{\partial D} f \nabla f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_D \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x}$

(b) Falls ∇f in jedem Punkt von ∂D tangential zu ∂D ist, ist $f_{|D}$ konstant.

2. Kann ein Vektorfeld $\mathbf{B}$ in der Form $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ dargestellt werden, so kann man

(a) $\mathbf{A}$ durch $\mathbf{A} + \Delta\mathbf{\Lambda}$ ersetzen, ohne dass sich $\mathbf{B}$ dadurch ändert, wobei $\mathbf{\Lambda}$ ein beliebiges Vektorfeld und Δ der Laplace-Operator ist.

(b) $\mathbf{A}$ durch $\mathbf{A} + \nabla\mathbf{\Lambda}$ ersetzen, ohne dass sich $\mathbf{B}$ dadurch ändert, wobei $\mathbf{\Lambda}$ ein beliebiges Vektorfeld ist.

(c) $\mathbf{A}$ durch $\mathbf{A} + \Delta\Lambda$ ersetzen, ohne dass sich $\mathbf{B}$ ändert, wobei Λ ein beliebiges skalares Feld ist.

(d) $\mathbf{A}$ durch $\mathbf{A} + \mathrm{rot}\,\mathbf{\Lambda}$ ersetzen, ohne dass sich $\mathbf{B}$ ändert, wobei $\mathbf{\Lambda}$ ein beliebiges Vektorfeld ist.

- Die Multiple-Choice Fragen (Aufgabe 7) sind online unter echo.ethz.ch zu beantworten. Abgabefrist für die Multiple-Choice Aufgaben ist Montag, 5. Juni 2017 um 13:00.
- Ihre Lösungen zu den Aufgaben 1-6 dieser Serie werden nicht mehr abgeben.