Formelsammlung Analysis I & II

Wichtige eindimensionale Integrale:

$$\int x^s \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{s+1}x^{s+1} + C & \text{falls } s \neq -1 \\ \log|x| + C & \text{falls } s = -1 \end{cases}$$

$$\int \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\int \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Partielle Integration: Für zwei stetig differenzierbare Funktionen u und v gilt

$$\int uv' \,\mathrm{d}x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}x + C.$$

Substitution: Seien $I_u, I_x \subseteq \mathbb{R}$. Seien weiters $g : I_u \to \mathbb{C}$ und $f : I_x \to I_u$ stetig differenzierbar. Dann gilt mit $u = f(x)$

$$\int (g \circ f)(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Trigonometrische und hyperbolische Substitution:

- Bei $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}x$ für $a > 0$: Substitution $x = a\sin(\theta)$ mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, wobei $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = a\cos(\theta)$.
- Bei $\int (a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}x$ für $a > 0$: Substitution $x = a\tan(\theta)$ mit $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, wobei $(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\cos(\theta)}$.
- Sei $n \geq -1$. Bei $\int (x^2 - a^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}x$ für $a \in \mathbb{R}$: Substitution $x = a\cosh(u)$, wobei $(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = a\sinh(u)$.

Das Wallissche Produkt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2} = \pi$

Die Stirling-Formel: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus: Für $x \in [-1, 1)$ gilt:

$$\log(1 + x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}$$

Verdichtungskriterium für Reihen: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nicht-negativen, monoton abnehmenden Gliedern $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent ist.

Taylor-Approximation: Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}((a,b))$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt für alle $x \in (a,b)$

$$f(x) = P_{f,x_0}^{(n)}(x) + R_{f,x_0}^{(n)}(x)$$

mit

$$P_{f,x_0}^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \text{ und } R_{f,x_0}^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t,$$

wobei $P_{f,x_0}^{(n)}(x)$ die n-te Taylor-Approximation ist und $R_{f,x_0}^{(n)}$ das sogenannte Integral-Restglied ist.

Mehrdimensionale Taylor-Approximation: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ $(d+1)$-mal stetig differenzierbar. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, sodass $x + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt

$$f(x+h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \|\alpha\|_1 \leq d} \frac{1}{\alpha!}\partial_\alpha f(x) h^\alpha + R_{x,d}^f(h)$$

mit

$$R_{x,d}^f(h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \|\alpha\|_1 = d+1} h^\alpha \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{\alpha!}\partial_\alpha f(x+th)\,\mathrm{d}t = \mathcal{O}\left(\|h\|^{d+1}\right)$$

für $h \to 0$. Hierbei ist $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ für alle $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$.

Konvexität: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I heisst konvex, falls

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{1}$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ und für alle $t \in [0,1]$. Wir sagen, dass f streng konvex ist, falls in (1) eine strikte Ungleichung gilt, wenn immer $x_1 \neq x_2$ und $t \in (0,1)$. Eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heisst (streng) konkav, wenn $f = -g$ (streng) konvex ist. Falls f zweimal differenzierbar ist und $f'' \geq 0$ auf ganz I erfüllt, dann ist f konvex.

Jensen-Ungleichung: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $x_1, \ldots, x_n \in (a,b)$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nicht-negativ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Dann gilt $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$.

Young-Ungleichung: Seien $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ und $a, b \geq 0$. Dann gilt $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Hölder-Ungleichung: Sei $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ und $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_d)^t, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)^t \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\sum_{k=1}^d |x_k y_k| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$. Für $p = q = 2$ ergibt sich die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.

Minkowski-Ungleichung: Seien $p > 1$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$.

Charakterisierungen der Stetigkeit: Seien X, Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) Die Funktion f ist stetig.

(ii) Für jedes $x \in X$ ist f bei x ε-δ-stetig.

(iii) Für jedes $x \in X$ ist f bei x folgenstetig.

(iv) Für jede offene Teilmenge $O \subset Y$ ist $f^{-1}(O)$ eine offene Teilmenge von X.

(v) Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X.

Banachscher Fixpunktsatz: Sei (X, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum. Sei $T : X \to X$ eine Lipschitz-Kontraktion, das heisst

$$\mathrm{d}(T(x_1), T(x_2)) \leq \lambda \, \mathrm{d}(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ und für eine fixe Lipschitz-Konstante $\lambda < 1$. Dann existiert ein eindeutiges $x_0 \in X$ mit $T(x_0) = x_0$.

Picard-Lindelöf: Es sei $d \geq 1$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^d$ stetig. Angenommen für alle $(t_0, x_0) \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(t_0, x_0) \subset U$ und $M > 0$, so dass für alle $(t, x_1), (t, x_2) \in B_\varepsilon(t_0, x_0)$ die Abschätzung

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|$$

gilt. Seien weiters $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $(t_0, x_0) \in U$ gegeben.
Existenz: Dann existiert ein Zeitintervall $I = I_{\max} = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $x : I \to \mathbb{R}^d$ mit

- $(t, x(t)) \in U$ für alle $t \in I$,
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in I$ und
- $x(t_0) = x_0$.

Eindeutigkeit: Für jede weitere Lösung $y : J \to \mathbb{R}^d$ desselben Anfangswertproblems definiert auf einem offenen Intervall J mit $t_0 \in J$ gilt $J \subset I$ und $x|_J = y$.
Maximalität: Die Grenzwerte $\lim_{t \searrow a} (t, x(t))$ und $\lim_{t \nearrow b} (t, x(t))$ existieren in U nicht.

Satz zur impliziten Funktion: Sei $r > 0$ ein Radius und seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ Punkte. Angenommen die stetige Funktion $F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \to \mathbb{R}^m$ erfüllt die folgenden drei Bedingungen:

- $F(x_0, y_0) = 0$.
- Die partiellen Ableitungen
$$\partial_{y_k} F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \to \mathbb{R}^m$$
existieren für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ und sind auf $B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0)$ stetig.
- Die totale Ableitung A bei y_0 der Abbildung $y \in B_r(y_0) \mapsto F(x_0, y)$ ist invertierbar, das heisst, die Matrix $A = (\partial_{y_k} F_j(x_0, y_0))_{j,k} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ hat nichtverschwindende Determinante.

Dann existiert ein offener Ball $U_0 = B_\alpha(x_0)$ um x_0 und ein offener Ball $V_0 = B_\beta(y_0)$ um y_0 mit $\alpha, \beta \in (0, r)$ und eine stetige Funktion $f : U_0 \to V_0$, so dass für alle $(x, y) \in U_0 \times V_0$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ genau dann gilt, wenn $y = f(x)$ gilt. Insbesondere ist $f(x_0) = y_0$.

Falls F d-mal stetig differenzierbar ist für $d \geq 1$, dann ist die stetige Lösungsfunktion f ebenso d-mal stetig differenzierbar und die Ableitung von f bei $x \in U$ ist gegeben durch
$$\mathrm{D}_x f = -((\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{y}} F)(x, f(x)))^{-1} (\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}} F)(x, f(x)).$$

Teilmannigfaltigkeit: Sei $0 \leq k \leq n$ für $n \geq 1$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale (glatte) Teilmannigfaltigkeit, falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p in $\mathbb{R}^n$ von p und einen Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \to V_p = \varphi(U_p)$ auf eine weitere offene Teilmenge $V_p \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so dass
$$\varphi_p(U_p \cap M) = \{y \in V_p \mid y_i = 0 \text{ für alle } i > k\}.$$

Charakterisierung positiv / negativ definiter Matrizen: Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn alle der folgenden Determinanten positiv sind:
$$a_{11}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \det(A).$$

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist. Falls A nicht-degeneriert und weder positiv definit noch negativ definit ist, dann ist A indefinit.

Satz von Fubini: Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ zwei abgeschlossene Quader und sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann existiert das Parameterintegral

$$x \in X \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{dvol}(y)$$

für fast alle $x \in X$ und es gilt

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\,\mathrm{dvol}((x,y)) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)\,\mathrm{dvol}(y)\right] \mathrm{dvol}(x).$$

Genauer formuliert, definieren wir die Funktionen $f_x : y \in Y \mapsto f(x,y)$ sowie

$$F : x \in X \mapsto \underline{I}(f_x) = \begin{cases} \int_Y f_x(y)\,\mathrm{dvol}(y) & \text{falls } f_x \text{ Riemann-integrierbar ist} \\ \underline{I}(f_x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist F auf X Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\,\mathrm{dvol}((x,y)) = \int_X F(x)\,\mathrm{dvol}(x).$$

Mehrdimensionale Substitutionsregel: Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Jordan-messbare offene Teilmengen und sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus. Des Weiteren sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist $x \in X \mapsto (f \circ \Phi(x))|\det(\mathrm{D}_x \Phi)|$ (zumindest uneigentlich) Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Y f(y)\,\mathrm{dvol}(y) = \int_X (f \circ \Phi(x))|\det(\mathrm{D}_x \Phi)|\,\mathrm{dvol}(x),$$

wobei die Funktion $x \in X \mapsto \det(\mathrm{D}_x \Phi)$ als die Jacobi-Determinante von Φ bezeichnet wird.

Weg- und Flussintegral: Für eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$, deren Rand eine positiv orientierte Parametrisierung $\gamma_1 : I_1 = [a_1, b_1] \to \partial B, \ldots, \gamma_K : I_K = [a_K, b_K] \to \partial B$ besitzt, ist

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{K} \int_{a_k}^{b_k} \langle f(\gamma_k(t)), \dot{\gamma}_k(t)\rangle\,\mathrm{d}t.$$

Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$. Das Flussintegral von f durch den Rand ∂B ist

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial B} (Rf) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{K} \int_{a_k}^{b_k} \langle f(\gamma_k(t)), R^{-1}\dot{\gamma}_k(t)\rangle\,\mathrm{d}t.$$

Divergenzsatz auf zweidimensionalen Quadern: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein achsenparalleler Quader, sei $U \supset B$ eine offene Menge im $\mathbb{R}^2$ und sei $f = (f_1, f_2)^t : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} \tag{2}$$

wobei die Divergenz gegeben ist durch $\operatorname{div}(f) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$.

Divergenzsatz in der Ebene (im Raum): Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ (oder $B \subset \mathbb{R}^3$) ein glatt berandeter, kompakter Bereich. Weiter sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Menge $U \supset B$. Dann gilt wiederum (2) (wobei im $\mathbb{R}^3$ die Divergenz durch $\operatorname{div}(f) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3$ gegeben ist).

Satz von Green: Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$. Die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f)$ existiert auf ganz U und erfüllt $\operatorname{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$. Weiter gilt für jeden glatt berandeten, kompakten Bereich $B \subset U$

$$\int_B \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{dvol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Satz von Stokes: Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ und sei $S \subset U$ eine glatt berandete, orientierbare Fläche. Dann gilt

$$\int_S \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial S} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s},$$

wobei die Rotation gegeben ist durch

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg!