Analysis I und II

8. Juni 2017

Kapitel 1

Einführung

1.1 Quadratur der Parabel

Proposition 1.1. *Angenommen es gibt einen Begriff eines Flächeninhalts für Gebiete in* $\mathbb{R}^2$*, der folgende Eigenschaften erfüllt:*

- *Der Flächeninhalt des sogenannten abgeschlossenen Rechtecks*

  $$[a,b] \times [c,d] = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\big\}$$

  und des sogenannten offenen Rechtecks

  $$(a,b) \times (c,d) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ c < y < d\big\}$$

  ist gleich $(b-a)(d-c)$*, wobei* a,b,c,d *reelle Zahlen sind mit* $a \leq b, c \leq d$*.*

- *Falls* G *ein Gebiet in* $\mathbb{R}^2$ *ist und* F *ein in* G *enthaltenes Gebiet ist, dann ist der Flächeninhalt von* F *kleiner oder gleich dem Flächeninhalt von* G*.*

- *Für disjunkte*[1] *Gebiete* F, G *in* $\mathbb{R}^2$ *ist der Flächeninhalt des vereinigten Gebietes* $F \cup G$ *die Summe der Flächeninhalte von* F *und* G*.*

Dann ist der Flächeninhalt von P *wie in Gleichung* (**??**) *(falls überhaupt definiert) gleich* $\frac{1}{3}$*.*

Lemma 1.2. *Sei* $n \geq 1$ *eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{1.1}$$

1.2 Mengenlehre und Abbildungen

1.2.1 Naive Mengenlehre

Definition 1.3. Wir sagen, dass eine Menge P **Teilmenge** einer Menge Q ist und schreiben $P \subseteq Q$, falls für alle $x \in P$ auch $x \in Q$ gilt (in Prädikatenlogik $\forall x \in P : x \in Q$). Wir sagen,

[1] Das heisst, dass es keinen Punkt gibt, der in F und G liegt oder intuitiv ausgedrückt, dass sich F und G nicht überschneiden.

dass P eine **echte Teilmenge** von Q ist und schreiben $P \subsetneq Q$, falls P eine Teilmenge von Q ist, aber nicht gleich Q ist. Wir schreiben $P \not\subseteq Q$, falls P nicht eine Teilmenge von Q ist (also $\neg(P \subseteq Q)$ gilt).

Definition 1.4. Seien P, Q zwei Mengen. Der **Durchschnitt** $P \cap Q$, die **Vereinigung** $P \cup Q$, das **relative Komplement** $P \setminus Q$ und die **symmetrische Differenz** $P \triangle Q$ sind durch

$$\begin{aligned} P \cap Q &= \{x \mid x \in P \wedge x \in Q\} \\ P \cup Q &= \{x \mid x \in P \vee x \in Q\} \\ P \setminus Q &= \{x \mid x \in P \wedge x \notin Q\} \\ P \triangle Q &= P \setminus Q \cup Q \setminus P = \{x \mid x \in P \text{ XOR } x \in Q\} \end{aligned}$$

definiert. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, dass alle betrachteten Mengen Teilmengen einer gegebenen (Ober-) Menge X sind, dann ist das **Komplement** P^c von P definiert durch $P^c = X \setminus P$. Dies ist alles in den Bildern **??** und **??** veranschaulicht.

Definition 1.5. Sei $\mathcal{A}$ eine Kollektion von Mengen. Dann definieren wir die **Vereinigung** resp. den **Schnitt** der Mengen in $\mathcal{A}$ als

$$\begin{aligned} \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A &= \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\} \\ \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A &= \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\} \end{aligned}$$

Vergewissern Sie sich an dieser Stelle, dass sich diese beiden Begriffe zu Definition **??** kompatibel sind. Falls wir die Vereinigung nicht über alle Mengen in $\mathcal{A}$ nehmen wollen, sondern nur über solche, die eine gewisse Eigenschaft $E(A)$ erfüllen, dann schreiben wir auch

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A} : E(A)} A = \bigcup_{A \in \{B \in \mathcal{A} \mid E(B)\}} A$$

und analog für den Durchschnitt. Falls $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ...\}$, dann schreiben wir auch

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$$

und

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid \forall n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}.$$

Definition 1.6. Zwei Mengen A, B heissen **disjunkt**, falls $A \cap B = \{\}$. In diesem Fall wird ihre Vereinigung $A \cup B$ **disjunkte Vereinigung** genannt und auch als $A \sqcup B$ geschrieben. Für eine Kollektion $\mathcal{A}$ von Mengen, sagen wir, dass die Mengen in $\mathcal{A}$ **paarweise disjunkt** sind, falls für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \neq A_2$ gilt $A_1 \cap A_2 = \{\}$. Die Vereinigung der Mengen in $\mathcal{A}$ wird dann auch disjunkte Vereinigung genannt und als $\bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} A$ geschrieben.

Definition 1.7. Für zwei Mengen X und Y ist das **kartesische Produkt** $X \times Y$ die Menge aller geordneten Paare (x, y) wobei $x \in X$ und $y \in Y$. In Symbolen,

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}.$$

Allgemeiner ist das kartesische Produkt von n-Mengen $X_1, X_2, ..., X_n$ definiert als

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\}.$$

Weiters definieren wir X^n, für eine natürliche Zahl n, als das n-fache kartesische Produkt von X mit sich selbst. Das heisst, $X^2 = X \times X$, $X^3 = X \times X \times X$ und so weiter.

Definition 1.8. Für eine Menge X ist die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ durch die Menge all ihrer Teilmengen gegeben, das heisst

$$\mathcal{P}(X) = \{Q \mid Q \text{ ist eine Menge und } Q \subseteq X\}.$$

1.2.2 Abbildungen

Definition 1.9. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

- Die Funktion f heisst **injektiv**, eine **Injektion** oder eine **eindeutige Abbildung**, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt, dass $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
- Die Funktion f ist **surjektiv**, eine **Surjektion** oder eine Funktion von X **auf** Y, falls $f(X) = Y$.
- Die Funktion f heisst **bijektiv**, eine **Bijektion** oder eine **eineindeutige Abbildung**, falls f surjektiv und injektiv ist.

Definition 1.10. Angenommen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ sind Funktionen. Dann ist die **Verknüpfung** $g \circ f : X \to Z$ (gesprochen g nach f oder g Ring f) für alle $x \in X$ durch $g \circ f(x) = g(f(x))$ definiert.

Lemma 1.11. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen.*

a) Falls f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Falls f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

c) Falls f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Definition 1.12. Für eine Funktion $f : X \to Y$ und eine Teilmenge $B \subseteq Y$ definieren wir das **Urbild** $f^{-1}(B)$ von B unter f als

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Definition 1.13. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Der **Graph** von f ist

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

1.2.3 Relationen

Definition 1.14. Seien X und Y Mengen. Eine Relation auf $X \times Y$ ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$. Wir schreiben auch $x\mathcal{R}y$ falls $(x, y) \in \mathcal{R}$ und verwenden oft Symbole wie $<, \ll, \leq, \cong, \equiv, \sim$ für Relationen. Falls $X = Y$ ist, dann sprechen wir auch von einer Relation auf X. Wenn $\sim$ (resp. $\cong$,...) eine Relation ist, dann schreiben wir auch "$x \nsim y$" (resp. "$x \ncong y$",...) für "$\neg(x \sim y)$" (resp. "$\neg(x \cong y)$",...).

Definition 1.15. Eine Relation $\sim$ auf X ist eine **Äquivalenzrelation**, falls folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

- Reflexivität: $\forall x \in X : x \sim x$.
- Symmetrie: $\forall x, y \in X : x \sim y \implies y \sim x$.
- Transitivität: $\forall x, y, z \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \implies x \sim z$.

Definition 1.16. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Dann wird für $x \in X$ die Menge

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x genannt. Weiters ist

$$X/_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$$

der **Quotient** von X modulo $\sim$. Ein Element $x \in X$ wird auch **Repräsentant** seiner Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ genannt.

Definition 1.17. Sei X eine Menge und $\mathcal{P}$ eine Familie von nicht-leeren, paarweise disjunkten Teilmengen von X, so dass $X = \bigsqcup_{P \in \mathcal{P}} P$. Dann wird $\mathcal{P}$ eine **Partition** von X genannt.

Proposition 1.18. *Sei X eine Menge. Dann entsprechen Äquivalenzrelationen auf X und Partitionen von X einander im folgenden Sinne: Für eine gegebene Äquivalenzrelation $\sim$ auf X ist die Menge*

$$\mathcal{P}_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$$

eine Partition von X. Umgekehrt definiert für eine Partition $\mathcal{P}$ von X

$$x \sim_{\mathcal{P}} y \iff \exists P \in \mathcal{P} : x \in P \wedge y \in P$$

für $x, y \in X$ eine Äquivalenzrelation auf X. Des Weiteren sind die Konstruktion der Partition aus der Äquivalenzrelation und die Konstruktion der Äquivalenzrelation aus der Partition zueinander inverse Konstruktion: Für jede Partition $\mathcal{P}$ von X gilt $\mathcal{P}_{\sim_\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ und für jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf X gilt $\sim_{\mathcal{P}_\sim} = \sim$.

Lemma 1.19. *Seien X und Y Mengen und sei $\mathcal{P}$ eine Partition von X. Angenommen es ist für jedes $P \in \mathcal{P}$ eine Funktion $f_P : P \to Y$ gegeben. Dann existiert eine eindeutige Funktion $f : X \to Y$, so dass $f|_P = f_P$ für jedes $P \in \mathcal{P}$ gilt.*

1.2.4 Mächtigkeit

Definition 1.20. Zwei Mengen X, Y sind **gleichmächtig**, geschrieben $X \sim Y$, falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt.

Theorem 1.21. *Sei X eine Menge. Dann ist X nicht zu seiner Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ gleichmächtig. Insbesondere ist die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ der natürlichen Zahlen nicht gleichmächtig zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

Definition 1.22. Seien X und Y zwei Mengen. Dann sagen wir, dass X **schmächtiger** als (oder genau formuliert **höchstens so mächtig** wie) Y ist und schreiben $X \lesssim Y$, falls es eine Injektion $f : X \to Y$ gibt. Wir sagen, dass X **echt schmächtiger** (oder **weniger mächtig**) als Y ist, falls X schmächtiger als Y ist ($X \lesssim Y$) und Y nicht schmächtiger als X ist ($Y \not\lesssim X$).

Theorem 1.23. *Seien X und Y Mengen, so dass $X \lesssim Y$ und $Y \lesssim X$. Dann gilt $X \sim Y$.*

Definition 1.24. Eine Menge heisst **abzählbar unendlich**, falls sie die Kardinalität $|\mathbb{N}|$ hat oder in anderen Worten gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ wird auch $\aleph_0$, gesprochen **Aleph-**0, genannt.

Definition 1.25. Eine Menge X heisst **überabzählbar**, falls $\mathbb{N}$ schmächtiger ist als X, aber $\mathbb{N}$ nicht gleichmächtig zu X ist. Nach Theorem **??** ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar. Die Kardinalität von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wird auch mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet und das **Kontinuum** genannt.

Kapitel 2

Die reellen Zahlen

2.1 Die Axiome der reellen Zahlen

Definition 2.1. Eine Menge $\mathbb{R}$ gemeinsam mit einer Abbildung

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y,$$

die wir **Addition** nennen, einer Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

die wir **Multiplikation** nennen, und einer Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$, die wir **kleiner gleich** nennen, wird als Menge der **reellen Zahlen** bezeichnet, falls die in diesem Abschnitt aufgelisteten 16 Axiome erfüllt sind.

2.2 Die natürlichen Zahlen

2.2.1 Definition der natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

Definition 2.2. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist **induktiv**, falls folgende zwei Eigenschaften gelten:

(i) $1 \in M$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \in M \implies x + 1 \in M$.

Definition 2.3. Wir definieren die Teilmenge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ als Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} = \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M.$$

Lemma 2.4. *Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden eine induktive und somit die kleinste induktive Teilmenge der reellen Zahlen.*

Satz 2.5. *Falls für eine Aussage $A(n)$ über die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$*

- *(Induktionsanfang)* $A(1)$ *und*
- *(Induktionsschritt)* $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \implies A(n+1))$

gelten, dann gilt $A(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 2.6. *Für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *gilt* $m + n \in \mathbb{N}$ *und* $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Lemma 2.7.

- *Für* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $n = 1$ *oder* $n - 1 \in \mathbb{N}$.
- *Für* $m, n \in \mathbb{N}$ *mit* $m \leq n \leq m + 1$ *gilt* $n = m$ *oder* $n = m + 1$.

Satz 2.8. *Sei* $M \subseteq \mathbb{N}$ *eine nicht-leere Teilmenge. Dann hat* M *ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element, das heisst* $\exists! n_0 \in M \ \forall n \in M : n \geq n_0$.

Satz 2.9. *Falls für eine Aussage* $A(n)$ *über die natürlichen Zahlen* $n \in \mathbb{N}$ *die Aussage*

- *(Induktion)* $\forall n \in \mathbb{N} : \Big(\big(\forall k \in \mathbb{N} : (k < n \implies A(k))\big) \implies A(n) \Big)$

erfüllt ist, dann gilt $A(n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

Lemma 2.10. *Für alle* $m, n \in \mathbb{N}$ *mit* $m < n$ *gilt* $n - m \in \mathbb{N}$.

2.2.2 Die ganzen Zahlen

Lemma 2.11. *Die ganzen Zahlen sind unter Addition und Multiplikation abgeschlossen, das heisst, für alle* $m, n \in \mathbb{Z}$ *gilt* $m + n \in \mathbb{Z}$ *und* $mn \in \mathbb{Z}$.

2.2.3 Die rationalen Zahlen

Lemma 2.12. *Die rationalen Zahlen bilden einen Unterkörper von* $\mathbb{R}$*, das heisst, für alle* $r, s \in \mathbb{Q}$ *gilt* $-r, r + s, rs \in \mathbb{Q}$ *und auch* $r^{-1} \in \mathbb{Q}$*, falls* $r \neq 0$.

Lemma 2.13. *Die reelle Zahl* $\sqrt{2}$ *ist irrational.*

2.2.4 Division mit Rest und Anfänge der Zahlentheorie

Satz 2.14. *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $d \in \mathbb{N}$ *gibt es ein* $q \in \mathbb{N}_0$ *und ein* $r \in \mathbb{N}_0$ *mit* $r < d$*, welches wir den Rest nennen, so dass* $n = qd + r$.

2.3 Die komplexen Zahlen

2.3.1 Verwendung der ganzen Zahlen und deren Eigenschaften

Proposition 2.15. *Mit den oben definierten Verknüpfungen definiert* $\mathbb{C}$ *einen Körper, den* ***Körper der komplexen Zahlen****. Hierbei ist die Null gleich* $0 + 0\mathrm{i}$ *und die Eins gleich* $1 + 0\mathrm{i}$.

Definition 2.16. Die **komplexe Konjugation** ist die Abbildung

$$\bar{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z = x + y\mathrm{i} \mapsto \bar{z} = x - y\mathrm{i}.$$

Lemma 2.17. *Die komplexe Konjugation erfüllt folgende Eigenschaften:*

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ und $z\bar{z} \geq 0$. Des Weiteren gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $z\bar{z} = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.

(ii) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(iii) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

2.4 Intervalle und der Absolutbetrag

2.4.1 Intervalle

Definition 2.18. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann ist das **abgeschlossene Intervall** $[a, b]$ durch

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

das **offene Intervall** (a, b) durch

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

das **(rechts) halboffene Intervall** $[a, b)$ durch

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

und das **(links) halboffene Intervall** $(a, b]$ durch

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

definiert. Wenn das Intervall nicht-leer ist, dann wird a der **linke Endpunkt**, b der **rechte Endpunkt**, und $b - a$ die **Länge des Intervalls** genannt.

Definition 2.19. Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die **unbeschränkten abgeschlossenen Intervalle**

$$[a, \infty) = \mathbb{R}_{\geq a} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$
$$(-\infty, b] = \mathbb{R}_{\leq b} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

und die **unbeschränkten offenen Intervalle**

$$(a, \infty) = \mathbb{R}_{>a} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$(-\infty, b) = \mathbb{R}_{<b} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Definition 2.20. Sei $x \in \mathbb{R}$. Ein offenes Intervall, das x enthält, wird auch **Umgebung** von x genannt. Für ein $\delta > 0$ wird das offene Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ die **δ-Umgebung** von x genannt.

2.4.2 Der Absolutbetrag auf den reellen Zahlen

Definition 2.21. Der **Absolutbetrag** ist die Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Definition 2.22. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ heisst **offen**, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ heisst **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

2.4.3 Der Absolutbetrag auf den komplexen Zahlen

Definition 2.23. Der **Absolutbetrag** $|\cdot|$ **auf** $\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$|x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

für $x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.

Definition 2.24. Der **offene Ball** mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$ ist die Menge

$$B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\}.$$

Definition 2.25. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heisst **offen**, wenn zu jedem Punkt in U ein offener Ball um diesen Punkt existiert, der in U enthalten ist. Formaler: Für alle $z \in U$ existiert ein Radius $r > 0$, so dass $B_r(z) \subseteq U$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heisst **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

2.5 Maximum und Supremum

2.5.1 Maximum und Minimum

Definition 2.26. Wir sagen, dass $x_0 = \max(X) \in \mathbb{R}$ das **Maximum** einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist, falls $x_0 \in X$ und für alle $x \in X$ die Ungleichung $x \leq x_0$ gilt.

Definition 2.27. Wir sagen, dass $x_0 = \min(X)$ das **Minimum** einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist, falls $x_0 \in X$ und $x \geq x_0$ für alle $x \in X$ gilt.

2.5.2 Supremum und Infimum

Definition 2.28. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heisst **von oben beschränkt**, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq s$ für alle $x \in X$. Die Zahl nennt man in diesem Fall eine **obere Schranke** von X. Die Begriffe "**von unten beschränkt**" und "**untere Schranke**" sind analog definiert. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ heisst **beschränkt**, falls sie von oben und von unten beschränkt ist.

Satz 2.29. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine von oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge. Dann gibt es eine **kleinste obere Schranke** von X, die auch das **Supremum** $\sup(X)$ von X genannt wird. Formal gelten also für $s_0 = \sup(X)$ folgende Eigenschaften:*

(a) (s_0 ist eine obere Schranke) $\forall x \in X : x \leq s_0$

(b) (s_0 ist kleiner gleich jeder oberen Schranke) $\forall s \in \mathbb{R} : ((\forall x \in X : x \leq s) \implies s_0 \leq s)$

Äquivalenterweise kann $s_0 = \sup(X)$ auch durch (a) und die folgende Bedingung definiert werden:

(b') (Kleinere Zahlen sind keine oberen Schranken) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x > s_0 - \varepsilon$.

Proposition 2.30. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere, von oben beschränkte Teilmenge und sei $c > 0$. Dann ist cA von oben beschränkt und es gilt*

$$\sup(cA) = c \sup(A).$$

Proposition 2.31. *Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei nicht-leere, von oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Dann ist $A + B$ von oben beschränkt und es gilt*

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

2.6 Das Archimedische Prinzip

2.6.1 Verwendung des Supremums und des Infimums

Satz 2.32. *Es gelten folgende Aussagen:*

(i) Jede nicht-leere, von oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum.

(ii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n + 1$.

(iii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Korollar 2.33. *Zwischen je zwei reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

2.7 Intervallschachtelung

Satz 2.34. *Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein nicht-leeres, abgeschlossenes, beschränktes Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ gegeben, so dass für alle natürlichen Zahlen $m \leq n$ die Inklusion $I_m \supseteq I_n$ oder äquivalenterweise die Ungleichungen $a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$ gelten. Dann ist der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \big[\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}\big]$$

nicht-leer.

2.7.1 Überabzählbarkeit

Korollar 2.35. *Die Teilmenge $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ (und daher auch $\mathbb{R}$) ist überabzählbar.*

2.7.2 Die Cantor-Menge

Definition 2.36. Die **Cantor-Menge** ist der Schnitt $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Satz 2.37. *Die oben konstruierte Abbildung $f : C \to \{\ell, r\}^{\mathbb{N}}$ ist eine Bijektion. Insbesondere ist also $C \sim \{\ell, r\}^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach Übung* **??** *und die Cantor-Menge ist überabzählbar.*

2.8 Eindeutigkeit der Menge der reellen Zahlen*

Satz 2.38. *Die Axiome von $\mathbb{R}$ in Abschnitt* **??** *legen die reellen Zahlen bis auf eindeutige Isomorphie fest. Genauer formuliert gilt folgende Aussage:*

Sei $\mathbb{R}'$ eine weitere Menge, auf der eine Addition, eine Multiplikation und eine kleiner-gleich-Relation definiert sind, so dass alle Axiome der reellen Zahlen erfüllt sind (das heisst, $\mathbb{R}'$ ist ein weiterer vollständiger angeordneter Körper). Wir bezeichnen mit $0' \in \mathbb{R}'$ das Nullelement in $\mathbb{R}'$ und mit $1' \in \mathbb{R}'$ das Einselement in $\mathbb{R}'$. Dann existiert eine bijektive Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(i) $\Phi(0) = 0'$ *und* $\Phi(1) = 1'$.

(ii) *(Φ ist additiv)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$

(iii) *(Φ ist multiplikativ)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$

(iv) *(Φ ist ordnungserhaltend)* $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y \iff \Phi(x) \leq \Phi(y))$

Kapitel 3

Funktionen und die reellen Zahlen

3.1 Summen und Produkte

3.1.1 Rechenregeln für das Produkt

Lemma 3.1. *Für alle reellen Zahlen* $a \geq -1$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt* $(1+a)^n \geq 1 + na$.

3.1.2 Die geometrische Summe

Proposition 3.2. *Sei* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $q \in \mathbb{C}$. *Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{falls } q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{falls } q \neq 1 \end{cases}.$$

3.2 Polynome

Definition 3.3. Eine **Polynomfunktion** auf $\mathbb{C}$ ist eine Funktion der Form

$$f : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Die Zahlen $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ heissen die **Koeffizienten** von f. Das grösste $k \in \{0, \ldots, n\}$ mit $a_k \neq 0$ ist der **Grad** $\deg(f)$ der Polynomfunktion f und $a_{\deg(f)}$ ist der **Leitkoeffizient** oder **führende Koeffizient** von f. Falls kein solches k existiert, das heisst, falls f die Polynomfunktion $z \in \mathbb{C} \mapsto 0z^0 = 0 \in \mathbb{C}$ ist, so nennt man die Polynomfunktion die **Null** und setzt den Grad auf $-\infty$. Eine Polynomfunktion der Form $z \in \mathbb{C} \mapsto a_0 z^0 \in \mathbb{C}$ für $a_0 \in \mathbb{C}$ wird auch **konstant** genannt und kurz mit a_0 bezeichnet. Eine Polynomfunktion mit Grad ≤ 1 wird **affin** oder **linear** genannt. Eine Polynomfunktion der Form $z \in \mathbb{C} \mapsto a_k z^k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ heisst ein **Monom**. Wir sagen, dass eine Polynomfunktion **reell** ist, wenn die Koeffizienten reell gewählt werden können. Wir werden eine reelle Polynomfunktion auch mit der zugehörigen Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ identifizieren.

Definition 3.4. Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Ein **Polynom** f über $\mathbb{K}$ ist ein formaler Ausdruck der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Hierbei ist x ein Symbol, das man auch als **Variable** bezeichnet. Wir definieren den **Polynomring** $\mathbb{K}[x]$ als die Menge der Polynome über $\mathbb{K}$ in der Variablen x mit Addition und Multiplikation gegeben durch die Formeln in Übung **??**.

Proposition 3.5. *Sei $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein nicht-konstantes Polynom. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl $M > 0$ eine reelle Zahl $R \geq 1$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ auch $|f(z)| \geq M$ gilt. Des Weiteren ist die Zuordnung, die jedem Polynom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ die zugehörige Polynomfunktion $z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ zuweist, bijektiv.*

3.3 Die Fakultät und der Binomialsatz

3.3.1 Fakultät

Definition 3.6. Die Funktion $n \in \mathbb{N}_0 \mapsto n! \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$0! = 1, \ n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Die Zahl $n!$ wird als n-**Fakultät** oder n-**Faktorielle** bezeichnet.

Lemma 3.7. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ die Kardinalität der Menge $\mathcal{S}_n$ der bijektiven Abbildungen $\{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ (auch **Permutationen** von $\{1, ..., n\}$ genannt).*

3.3.2 Binomialkoeffizienten

Proposition 3.8. *Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n-1$ gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{3.1}$$

Insbesondere ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.

3.3.3 Der binomische Lehrsatz

Satz 3.9. *Für $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(w+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k.$$

3.3.4 Eine Summe von Binomialkoeffizienten

Proposition 3.10. *Für jedes $d \in \mathbb{N}_0$ gibt es Konstanten $c_0, ..., c_d \in \mathbb{Q}$, so dass*

$$\sum_{k=1}^{n} k^d = \frac{1}{d+1} n^{d+1} + c_d n^d + ... + c_1 n + c_0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.11. *Für jedes $d \in \mathbb{N}_0$ ist $p_d(x)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten vom Grad d; für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < d$ gilt $p_d(k) = 0$. Des Weiteren gilt $p_d(n) = \binom{n}{d}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq d$ (siehe auch das Bild* **??***) und wir haben die Summenformel*

$$\sum_{k=0}^{n} p_d(k) = p_{d+1}(n+1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.4 Reellwertige Funktionen

3.4.1 Monotonie

Definition 3.12. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist

- **monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D : x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$,
- **streng monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) < f(y)$,
- **monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D : x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$,
- **streng monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D : x < y \implies f(x) > f(y)$,
- **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist,
- **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

3.4.2 Stetigkeit

Definition 3.13. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f **stetig bei einem Punkt** $x_0 \in D$ ist, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Die Funktion f ist **stetig**, falls sie bei jedem Punkt in D stetig ist. Formal gilt also

$$f \text{ ist stetig} \iff \forall x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Proposition 3.14. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Falls $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ Funktionen sind, die bei einem Punkt $x_0 \in D$ stetig sind, dann sind auch $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ und af_1 für $a \in \mathbb{R}$ stetig bei x_0. Insbesondere bildet die Menge der stetigen Funktionen*

$$C(D) = \{f \in F(D) \mid f \text{ ist stetig}\}$$

einen Unterraum des Vektorraums $F(D)$.

Korollar 3.15. *Polynome sind stetig, das heisst, $\mathbb{R}[x] \subseteq C(\mathbb{R})$.*

Proposition 3.16. *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen und sei $x_0 \in D_1$. Angenommen $f : D_1 \to D_2$ ist eine bei x_0 stetige Funktion und $g : D_2 \to \mathbb{R}$ ist eine bei $f(x_0)$ stetige Funktion. Dann ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ bei x_0 stetig. Insbesondere ist die Verknüpfung von stetigen Funktionen wieder stetig.*

3.5 Der Zwischenwertsatz

3.5.1 Komplex-wertige Funktionen

Satz 3.17. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ zwischen a und b, so dass $f(x) = c$ gilt.*

3.6 Der Satz der Umkehrabbildung

Satz 3.18. *Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion. Dann ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein Intervall und die Abbildung $f : I \to f(I)$ hat eine stetige, streng monotone inverse Abbildung $f^{-1} : f(I) \to I$.*

3.6.1 Wurzeln aus natürlichen Zahlen

Lemma 3.19. *Seien $m, k \in \mathbb{N}$. Die m-te Wurzel $\sqrt[m]{k}$ ist genau dann rational, wenn sie eine ganze Zahl ist.*

Kapitel 4

Das Riemannn-Integral

4.1 Treppenfunktionen und deren Integral

4.1.1 Zerlegungen

Definition 4.1. Eine **Zerlegung** (oder **Unterteilung**) $\mathfrak{Z}$ von $[a, b]$ ist gegeben durch endlich viele Punkte

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Die Punkte $x_0, \ldots, x_n$ werden die Teilungspunkte der Zerlegung genannt. Wir schreiben $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$.

Definition 4.2. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine **Treppenfunktion** (abgekürzt **TF**), falls es eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ gibt, so dass es für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ eine Zahl $c_k \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\forall x \in (x_{k-1}, x_k) : f(x) = c_k.$$

Eine Treppenfunktion soll also konstant sein auf den Intervallen in der Partition $\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$. Die Intervalle (x_{k-1}, x_k) für $k \in \{1, \ldots, n\}$ heissen auch **Konstanzintervalle** der Treppenfunktion f und $\mathfrak{Z}$ heisst eine **Zerlegung in Konstanzintervalle** von f. Die Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ nennen wir **Konstanzwerte** von f bezüglich $\mathfrak{Z}$.

Definition 4.3. Seien $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ zwei Zerlegungen von $[a, b]$. Wir sagen, dass $\mathfrak{Z}'$ **feiner als** $\mathfrak{Z}$ ist, falls jeder Teilungspunkt von $\mathfrak{Z}$ ein Teilungspunkt von $\mathfrak{Z}'$ ist. Die **gemeinsame Verfeinerung** zweier Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ ist die Zerlegung, deren Menge von Teilungspunkte die Vereinigung der Menge der Teilungspunkte von $\mathfrak{Z}$ und von $\mathfrak{Z}'$ ist.

4.1.2 Das Integral einer Treppenfunktion

Definition 4.4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ in Konstanzintervalle von f. Seien $c_1, \ldots, c_n$ die Konstanzwerte von

f bezüglich $\mathfrak{Z}$. Dann definieren wir

$$I(f,\mathfrak{Z}) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Lemma 4.5. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ eine Zerlegung in Konstanzintervalle von f. Dann hängt $I(f,\mathfrak{Z})$ nicht von den Funktionswerten $f(x_k)$ für $k \in \{1,\ldots,n\}$ und von der Wahl der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ ab.*

Definition 4.6. Für eine Treppenfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir das **Integral der Treppenfunktion** f als

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x = I(f,\mathfrak{Z}),$$

wobei $\mathfrak{Z}$ eine Zerlegung in Konstanzintervalle von f ist.

Lemma 4.7. *Die nicht-leere Menge*

$$TF([a,b]) = \{f \in F([a,b]) \mid f \textit{ ist eine Treppenfunktion}\}$$

der Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ ist ein Unterraum des Vektorraums $F([a,b])$ der Funktionen auf $[a,b]$ und die Abbildung $\int : TF([a,b]) \to \mathbb{R}$ ist linear. Das heisst, für alle $f,g \in TF([a,b])$ und $s \in \mathbb{R}$ ist $f+g \in TF([a,b])$, $sf \in TF([a,b])$ und

$$\int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_a^b g\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b (sf)\,\mathrm{d}x = s\int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

Lemma 4.8. *Sind $f,g \in TF([a,b])$ zwei Treppenfunktionen mit $f \le g$, dann gilt*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere impliziert $f \in TF([a,b])$ und $f \ge 0$, dass $\int_a^b f\,\mathrm{d}x \ge 0$.

4.2 Definition des Riemann-Integrals

Definition 4.9. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f

- **von oben beschränkt** ist, falls die Wertemenge $f(D)$ von oben beschränkt ist,
- **von unten beschränkt** ist, falls die Wertemenge $f(D)$ von unten beschränkt ist,
- **beschränkt** ist, falls f von oben und von unten beschränkt ist.

Definition 4.10. Sei $f \in F([a,b])$ beschränkt. Dann definieren wir die (nicht-leere) Menge der **Untersummen** durch

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_a^b u\,\mathrm{d}x \mid u \in TF([a,b]) \wedge u \le f \right\}$$

und die (nicht-leere) Menge der **Obersummen** durch

$$\mathcal{O}(f) = \left\{ \int_a^b o \, \mathrm{d}x \mid o \in TF([a,b]) \wedge f \le o \right\}.$$

Definition 4.11. Für eine beschränkte Funktion $f \in F([a,b])$ wird $\underline{I}(f) = \sup \mathcal{U}(f)$ das **untere Integral** von f und $\overline{I}(f) = \inf \mathcal{O}(f)$ das **obere Integral** von f genannt. Die Funktion f heisst **Riemann-integrierbar**, oder kurz **R-integrierbar**, falls $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. In diesem Fall wird dieser gemeinsame Wert das Riemann-Integral

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

genannt. Des Weiteren definieren wir

$$R([a,b]) = \{ f \in F([a,b]) \mid f \text{ ist Riemann-integrierbar} \}.$$

Proposition 4.12. *Sei $f \in F([a,b])$ beschränkt. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(i) f ist Riemann-integrierbar.

(ii) Es existiert höchstens eine (oder auch genau eine) reelle Zahl I, die die Ungleichungen

$$\int_a^b u \, \mathrm{d}x \le I \le \int_a^b o \, \mathrm{d}x$$

für alle $u, o \in TF([a,b])$ mit $u \le f \le o$ erfüllt.

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ existieren $u, o \in TF([a,b])$ mit $u \le f \le o$, so dass $\int_a^b (o-u) \, \mathrm{d}x < \varepsilon$.

4.3 Erste Integrationsgesetze

Satz 4.13. *Die Menge*

$$R([a,b]) = \{ f \in F([a,b]) \mid f \textit{ ist Riemann-integrierbar} \}$$

der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bildet einen Unterraum von $F([a,b])$ und das Integral ist eine lineare Funktion auf $R([a,b])$. Das heisst, für $f, f_1, f_2 \in R([a,b])$ und $s \in \mathbb{R}$ ist $sf, f_1 + f_2 \in R([a,b])$ und

$$\int_a^b (sf)(x) \, \mathrm{d}x = s \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x, \quad \int_a^b (f_1 + f_2)(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Satz 4.14. *Für zwei Funktionen $f_1, f_2 \in R([a,b])$ gelten folgende Monotonie-Eigenschaften des Riemann-Integrals:*

(i) Falls $f_1 \ge 0$ ist, so gilt $\int_a^b f(x) \; dx \ge 0$.

(ii) Falls $f_1 \le f_2$ ist, so gilt $\int_a^b f_1(x) \; dx \le \int_a^b f_2(x) \; dx$.

(iii) Die Funktion $|f_1|$ ist Riemann-integrierbar und es gilt die ***Dreiecksungleichung***

$$\left| \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_1(x)|\,\mathrm{d}x$$

4.4 Integrierbarkeit monotoner Funktionen

Satz 4.15. *Jede monotone Funktion in $F([a,b])$ ist Riemann-integrierbar.*

4.5 Integration über Teilintervalle

Satz 4.16. *Unter Verwendung obiger Notation gilt, dass $f \in F([a,c])$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn f_1 und f_2 Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definition 4.17. Sei $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall mit $a < b$. Eine Funktion $f \in F([a,b])$ heisst **stückweise monoton**, falls es eine Zerlegung

$$\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

von $[a,b]$ gibt, so dass $f|_{(x_{k-1},x_k)}$ monoton ist für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$.

Korollar 4.18. *Sei $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall mit $a < b$. Jede stückweise monotone, beschränkte Funktion in $F([a,b])$ ist Riemann-integrierbar.*

4.6 Integration von Polynomen

Satz 4.19. *Die Einschränkung einer reellen Polynomfunktion auf $[a,b]$ ist Riemann-integrierbar. Für alle Monome x^d mit $d \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\int_a^b x^d\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d+1}\left(b^{d+1} - a^{d+1}\right).$$

Kapitel 5

Folgen, Grenzwerte und Kompaktheit

5.1 Folgen und Konvergenz

Definition 5.1. Sei X eine Menge. Eine **Folge** in X ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$. Das Bild $a(n)$ von $n \in \mathbb{N}$ schreibt man auch als a_n und bezeichnet man als das n-te **Folgenglied** von a. Anstatt $a : \mathbb{N} \to X$ schreibt man oft $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz $(a_n)_n$. Die Menge der Folgen in X wird auch als $X^{\mathbb{N}}$ bezeichnet. Eine Folge $(a_n)_n$ heisst **konstant**, falls $a_n = a_m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, und **schliesslich konstant**, falls ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n = a_m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$.

Definition 5.2. Wir sagen, dass eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{C}$ gegen eine Zahl $A \in \mathbb{C}$ **strebt**, gegen die Zahl A **konvergiert** oder **Grenzwert** A hat, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - A| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. In diesem Fall nennen wir die Folge **konvergent**. Falls es keinen Grenzwert in $\mathbb{C}$ gibt, nennen wir die Folge **divergent**.

Lemma 5.3. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge $(a_n)_n$ ist eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen ihn mit $\lim_{n\to\infty} a_n$.*

Lemma 5.4. *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Proposition 5.5. *Seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen.*

(i) Die Folge $(a_n)_n + (b_n)_n$ ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) Die Folge $(a_n b_n)_n$ ist konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n).$$

Insbesondere ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Folge $\alpha(a_n)_n$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(iii) *Angenommen* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. *Dann ist die Folge* $(\frac{1}{a_n})_n$ *konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

Nach (i) und (ii) bildet die Menge der konvergenten Folgen in $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *einen Unterraum und der Grenzwert stellt eine lineare Abbildung von diesem Unterraum nach* $\mathbb{C}$ *dar.*

Lemma 5.6. *Für eine konvergente Folge* $(a_n)_n$ *und* $\ell \in \mathbb{N}$ *ist die Folge* $(a_{n+\ell})_n$ *konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+\ell}.$$

5.1.1 Teilfolgen

Definition 5.7. Wenn $(a_n)_n$ eine Folge ist und $(n_k)_k : k \in \mathbb{N} \to n_k \in \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge ist, dann wird $(a_{n_k})_k$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_n$ genannt.

Lemma 5.8. *Sei* $(a_n)_n$ *eine konvergente Folge. Jede Teilfolge* $(a_{n_k})_k$ *von* $(a_n)_n$ *konvergiert und hat denselben Grenzwert* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

5.1.2 Zusammenhang zur Stetigkeit

Proposition 5.9. *Sei* $D \subseteq \mathbb{C}$ *eine Teilmenge,* $f : D \to \mathbb{C}$ *eine Funktion und* $z_0 \in D$. *Die Funktion* f *ist genau dann stetig bei* z_0, *wenn für jede Folge* $(a_n)_n$ *in* D *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = z_0$ *auch* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(z_0)$ *gilt.*

5.1.3 Cauchy-Folgen

Definition 5.10. Eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{C}$ ist eine Cauchy-Folge, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N$.

5.1.4 Reduktion auf reelle Folgen

Lemma 5.11. *Eine komplexwertige Folge* $(a_n)_n$ *ist genau dann konvergent (mit Grenzwert* $a \in \mathbb{C}$*), wenn die beiden reellwertigen Folgen* $(\mathrm{Re}(a_n))_n$ *und* $(\mathrm{Im}(a_n))_n$ *konvergent sind (mit Grenzwerten* $\mathrm{Re}(a)$ *respektive* $\mathrm{Im}(a)$*).*

5.1.5 Folgen von Vektoren

Lemma 5.12. *Eine Folge* $(\mathbf{a_n})_n$ *konvergiert genau dann gegen* $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_d)^t \in \mathbb{R}^d$, *wenn für jedes* $j \in \{1, \ldots, d\}$ *die reelle Folge* $(a_{j,n})_n$ *der* j*-ten Komponenten gegen* A_j *strebt.*

5.2 Reelle Folgen

Proposition 5.13. *Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ reelle Folgen mit Grenzwerten $a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

(i) Falls $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $a \leq b$.

(ii) Falls $a < b$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n < b_n$ für alle $n \geq N$.

Lemma 5.14. *Es seien $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ drei reelle Folgen, so dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Angenommen $(a_n)_n$ und $(c_n)_n$ sind konvergent und $A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Dann ist auch die Folge $(b_n)_n$ konvergent und $A = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

5.2.1 Monotone Folgen

Satz 5.15. *Eine monotone reelle Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Falls die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend ist, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Falls die Folge $(a_n)_n$ monoton fallend ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

5.2.2 Limes superior und Limes inferior

Definition 5.16. Für eine beschränkte reelle Folge $(a_n)_n$ ist der **Limes superior** definiert durch

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{k\geq n} a_k\Big) = \inf_{n\geq 1} \Big(\sup_{k\geq n} a_k\Big).$$

Definition 5.17. Für eine beschränkte, reelle Folge $(a_n)_n$ ist der **Limes inferior** definiert durch

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{k\geq n} a_k\Big) = \sup_{n\geq 1} \Big(\inf_{k\geq n} a_k\Big).$$

Satz 5.18. *Für eine reelle, beschränkte Folge $(a_n)_n$ erfüllt der Limes superior $\limsup_{n\to\infty} a_n$ die folgenden Eigenschaften:*

- *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Folgenglieder a_n mit $a_n > \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$.*
- *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Folgenglieder a_n mit $a_n \geq \limsup_{n\to\infty} a_n - \varepsilon$.*

5.2.3 Konvergente Teilfolgen

Satz 5.19. *Für jede konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$ einer beschränkten, reellen Folge $(a_n)_n$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in [\liminf_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n].$$

Des Weiteren existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$ *mit* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n$ *und eine konvergente Teilfolge* $(a_{m_k})_k$ *mit* $\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = \liminf_{n\to\infty} a_n$*.*

Definition 5.20. Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ heisst **Häufungspunkt** von $(a_n)_n$, falls es eine Teilfolge a_{n_k} gibt, so dass $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Lemma 5.21. *Sei* $(a_n)_n$ *eine reelle Folge. Dann ist* $A \in \mathbb{R}$ *genau dann ein Häufungspunkt von* $(a_n)_n$*, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *gibt mit* $|a_n - A| < \varepsilon$*.*

5.2.4 Reelle Cauchy-Folgen

Satz 5.22. *Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

5.2.5 Uneigentliche Grenzwerte

Definition 5.23. Eine reelle Folge $(a_n)_n$ **divergiert gegen** ∞, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \geq \epsilon^{-1}$ gilt für alle $n \geq N$. In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Genauso sagen wir, dass $(a_n)_n$ **gegen** $-\infty$ **divergiert**, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \leq -\epsilon^{-1}$ für alle $n \geq N$. In letzterem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. In beiden Fällen spricht man auch von **uneigentlicher Konvergenz** und **uneigentlichen Grenzwerten**.

5.2.6 Konvergente Teilfolgen von komplex- und vektorwertigen Folgen

Korollar 5.24. *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{C}$ *(oder in* $\mathbb{R}^d$ *mit* $d \in \mathbb{N}$*) hat eine konvergente Teilfolge.*

Korollar 5.25. *Eine Folge in* $\mathbb{C}$ *(oder in* $\mathbb{R}^d$ *mit* $d \in \mathbb{N}$*) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

5.3 Kompakte Intervalle und stetige Funktionen

5.3.1 Extremwerte einer Funktion

Satz 5.26. *Sei* $[a, b]$ *ein kompaktes Intervall und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann ist* $f([a, b])$ *ein kompaktes Intervall. Insbesondere nimmt die stetige Funktion* f *auf* $[a, b]$ *ein Maximum und ein Minimum an.*

5.3.2 Gleichmässige Stetigkeit

Definition 5.27. Eine reellwertige Funktion f auf $D \subseteq \mathbb{R}$ heisst **gleichmässig stetig**, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ gilt

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Satz 5.28. *Sei* $[a, b]$ *ein kompaktes Intervall und* f *eine reellwertige Funktion auf* $[a, b]$*. Die Funktion* f *ist genau dann stetig, wenn sie gleichmässig stetig ist.*

5.3.3 Riemann-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen

Satz 5.29. *Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall* $[a, b]$ *mit* $a < b$ *ist Riemann-integrierbar.*

5.4 Grenzwerte von Funktionen

5.4.1 Grenzwerte und punktierte Umgebungen

Lemma 5.30. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *eine Teilmenge,* $x_0 \in D$ *ein Häufungspunkt von* D *und* f *eine reellwertige Funktion auf* D*. Dann ist* f *genau dann stetig bei* x_0*, wenn* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*.*

Lemma 5.31. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *eine Teilmenge,* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0 \in D$ *ein Häufungspunkt von* D*. Dann gilt* $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$ *genau dann, wenn für jede Folge* $(a_n)_n$ *in* $D \setminus \{x_0\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ *auch* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$ *gilt.*

Proposition 5.32. *Seien* $D, E \subseteq \mathbb{R}$*,* x_0 *ein Häufungspunkt von* D*,* $f : D \to E$ *eine Funktion,* $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) \in E$*, und* $g : E \to \mathbb{R}$ *eine bei* y_0 *stetige Funktion. Dann gilt* $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$*.*

5.4.2 Umgebungsfilter und Konvergenz entlang eines Filters

Definition 5.33. Für eine gegebene Menge X ist eine nicht-leere Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X ein **Filter** auf X, falls folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

- Die leere Menge ist kein Element von $\mathcal{F}$.
- Für $U_1, U_2 \in \mathcal{F}$ gilt auch $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}$.
- Falls $U \in \mathcal{F}$ und $V \subseteq X$ eine Teilmenge, die U enthält, dann ist auch $V \in \mathcal{F}$.

Die in $\mathcal{F}$ enthaltenen Mengen werden auch **Filtermengen** genannt.

Definition 5.34. Seien nun $D \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $\mathcal{F}$ ein Filter auf D und $A \in \overline{\mathbb{R}}$ gegeben. Dann sagen wir, dass f **entlang** $\mathcal{F}$ **gegen** A konvergiert und schreiben $\lim_{\mathcal{F}} f(x) = A$, falls

$$\forall V \in \mathcal{U}_A \ \exists F \in \mathcal{F} \ \forall x \in F : f(x) \in V.$$

Lemma 5.35. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *eine Teilmenge und* $\mathcal{F}$ *ein Filter auf* D*. Angenommen* $f, g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ *sind Funktionen mit* $g_1 \leq f \leq g_2$ *und wir haben* $\lim_{\mathcal{F}} g_1(x) = \lim_{\mathcal{F}} g_2(x) = A \in \bar{\mathbb{R}}$*. Dann existiert auch der Grenzwert* $\lim_{\mathcal{F}} f$ *und ist durch* A *gegeben.*

5.5 Riemann-Summen

5.5.1 Landau Notation

Definition 5.36. Für eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ von $[a, b]$ definieren wir die **Maschenweite der Zerlegung** $\mathfrak{Z}$ als $|\mathfrak{Z}| = \max_{k=1,\ldots,n}(x_k - x_{k-1})$. Weiters bezeichnen wir $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in [a, b]^n$ als eine **erlaubte Wahl von Zwischenpunkten** der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ falls $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Für eine reellwertige Funktion f auf $[a, b]$, eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $[a, b]$ und eine erlaubte Wahl von Zwischenpunkten $\mathbf{z}$ definieren wir die **Riemann-Summe** durch

$$R(f, \mathfrak{Z}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Satz 5.37. *Sei f eine Riemann-integrierbare reellwertige Funktion auf $[a, b]$. Dann ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ der Grenzwert der Riemann-Summen $R(f, \mathfrak{Z}, z)$, wenn die Maschenweite $|\mathfrak{Z}|$ der Zerlegung gegen Null geht. Formal geschrieben gilt also*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall \mathfrak{Z}\ \forall \mathbf{z} : |\mathfrak{Z}| < \delta \implies \left| R(f, \mathfrak{Z}, \mathbf{z}) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,$$

wobei $\mathfrak{Z}$ über die Zerlegungen von $[a, b]$ läuft und $\mathbf{z}$ über die erlaubten Wahlen von Zwischenpunkten der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ (wie in Definition **??***) läuft.*

Kapitel 6

Reihen, Funktionenfolgen und Potenzreihen

6.1 Reihen

Definition 6.1. Sei $(a_k)_k$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Wir wollen die **unendliche Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ betrachten, wobei a_k für $k \in \mathbb{N}$ das **k-te Glied** oder der **k-te Summand** der Reihe genannt wird. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te **Partialsumme** der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ gegeben. Wir nennen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergent**, falls der Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

existiert, wobei wir diesen dann als **Wert der Reihe** bezeichnen. Ansonsten nennen wir die Reihe **divergent**.

Proposition 6.2. *Falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_n)_n$ eine* ***Nullfolge****, das heisst* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Lemma 6.3. *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k)$ konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Also bilden konvergente Reihen einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ und der Wert der Reihe stellt eine lineare Abbildung auf diesem Vektorraum nach $\mathbb{C}$ dar.

Lemma 6.4. *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} a_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell+N-1}$ genau dann konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{\infty} a_k.$$

Lemma 6.5. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Definiere $A_1 = a_1 + \cdots + a_{n_1}$ und $A_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$ für $k \geq 2$. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

6.1.1 Reihen mit nicht-negativen Gliedern

Proposition 6.6. *Für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nicht-negativen Gliedern $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ bilden die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ eine monoton wachsende Folge. Falls diese Folge der Partialsummen beschränkt ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ansonsten gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

Korollar 6.7. *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei Reihen mit der Eigenschaft $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und insbesondere gelten die Implikationen*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} &\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} &\implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}\,. \end{aligned}$$

Diese beiden Implikationen treffen auch dann zu, wenn $0 \leq a_n \leq b_n$ nur für alle hinreichend grossen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Proposition 6.8. *Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit nicht-negativen, monoton abnehmenden Gliedern $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent ist.*

6.1.2 Bedingte Konvergenz

Satz 6.9. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe mit reellen Gliedern. Dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R}$ eine bijektive Funktion (eine Umordnung) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ bedingt konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = A$ ist. Weiters gibt es eine Umordnung der Reihe, die divergiert.*

6.1.3 Alternierende Reihen

Proposition 6.10. *Gegeben sei eine monoton fallende Folge $(a_n)_n$ positiver Zahlen, die gegen Null konvergiert. Dann konvergiert die zugehörige alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ und es gilt, dass*

$$\left| \sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k+1}a_k - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \right| \leq a_{\ell+1}. \tag{6.1}$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Weiters ist

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \leq \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}a_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

6.1.4 Das Cauchy-Kriterium

Satz 6.11. *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n \geq m \geq N$*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

6.2 Absolute Konvergenz

Proposition 6.12. *Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist auch konvergent und es gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

6.2.1 Hinreichende Kriterien für absolute Konvergenz

Korollar 6.13. *Sei $(a_n)_n$ eine komplexe und $(b_n)_n$ eine reelle Folge mit $|a_n| \leq b_n$ für alle hinreichend grossen $n \in \mathbb{N}$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und daher auch konvergent.*

Korollar 6.14. *Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen und*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Dann gilt

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent,}$$
$$\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist divergent und } (a_n)_n \text{ ist keine Nullfolge.}$$

Korollar 6.15. *Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

existiert. Dann gilt

$$\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent.}$$
$$\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist divergent und } (a_n)_n \text{ konvergiert nicht gegen Null.}$$

6.2.2 Umordnen von Reihen

Satz 6.16. *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit komplexen Gliedern. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ ebenso absolut konvergent für jede bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}. \tag{6.2}$$

6.2.3 Produkte

Satz 6.17. *Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)_1} b_{\varphi(n)_2}$$

eine absolut konvergente Reihe, wobei $\varphi(n) = (\varphi(n)_1, \varphi(n)_2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)_1} b_{\varphi(n)_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right). \tag{6.3}$$

Korollar 6.18. *Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit komplexen Gliedern sind, dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right),$$

wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right)$ absolut konvergent ist.

6.3 Konvergenz von Funktionenfolgen

6.3.1 Punktweise Konvergenz

Definition 6.19. Eine reellwertige (oder komplexwertige) **Funktionenfolge** auf einer Menge X ist eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$ (oder $f_n : X \to \mathbb{C}$). Wir sagen, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ **punktweise** gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ (oder $f : X \to \mathbb{C}$) **konvergiert**, falls $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ und alle $x \in X$. Wir bezeichnen die Funktion f als den punktweisen **Grenzwert** oder **Limes** der Funktionenfolge $(f_n)_n$.

6.3.2 Gleichmässige Konvergenz

Definition 6.20. Sei $(f_n)_n$ eine komplexwertige Funktionenfolge auf einer Menge X und f eine weitere komplexwertige Funktion auf X. Dann **strebt f_n gleichmässig** gegen f für $n \to \infty$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in X$ die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt. In Prädikatenlogik ist gleichmässige Konvergenz durch

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \big(n \geq N \implies (\forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\big)$$

gegeben.

Satz 6.21. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge stetiger Funktionen. Falls $(f_n)_n$ gleichmässig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann ist f ebenso stetig.*

Satz 6.22. *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge Riemann-integrierbarer Funktionen. Falls $(f_n)_n$ gleichmässig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist f Riemann-integrierbar und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}x. \tag{6.4}$$

6.4 Potenzreihen

Definition 6.23. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist der formale Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{6.5}$$

eine **Potenzreihe** in der Variable z.

6.4.1 Konvergenzradius

Satz 6.24. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und R ihr Konvergenzradius. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ absolut und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Weiters konvergiert die Funktionenfolge $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ gleichmässig gegen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf jeder Kreisscheibe der Form $B_S(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < S\}$ für jedes $S < R$. Insbesondere definiert die Potenzreihe die stetige Abbildung*

$$z \in B_R(0) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

Lemma 6.25. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius R ist gegeben durch*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

falls dieser Grenzwert existiert.

6.4.2 Addition und Multiplikation

Proposition 6.26. *Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius R_a respektive R_b. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{R_a, R_b\}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) z^n.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius der Potenzreihen auf der rechten Seite mindestens $\min\{R_a, R_b\}$.

6.4.3 Stetigkeit bei Randpunkten

Satz 6.27. *Unter obigen Annahmen ist auch $\bar{f}$ stetig. Das heisst,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \bar{f}(R) = \lim_{x \nearrow R} \bar{f}(x) = \lim_{x \nearrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Eine analoge Aussage gilt, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ konvergiert.

6.5 Trigonometrische Funktionen

6.5.1 Die Kreiszahl π

Satz 6.28. *(Pi) Es gibt genau eine Zahl $\pi \in (0,4)$ mit $\sin(\pi) = 0$. Für diese Zahl gilt weiters*

$$\begin{aligned}
e^{2\pi \mathrm{i}} &= \cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi) = 1,\\
e^{\pi \mathrm{i}} &= \cos(\pi) = -1,\\
e^{\frac{1}{2}\pi \mathrm{i}} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i},\\
e^{\frac{3}{2}\pi \mathrm{i}} &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i},\\
e^{\frac{1}{4}\pi \mathrm{i}} &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Korollar 6.29. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \sin(z+\pi) &= -\sin(z), & \cos(z+\pi) &= -\cos(z), \\ \sin(z+2\pi) &= \sin(z), & \cos(z+2\pi) &= \cos(z), \\ \cos(z) &= \sin\left(z+\tfrac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

6.5.2 Polarkoordinaten und Multiplikation auf $\mathbb{C}$

Lemma 6.30. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *existiert ein eindeutig bestimmtes* $r \geq 0$ *und ein Winkel* $\theta \in [0, 2\pi)$ *mit* $z = re^{\mathrm{i}\theta}$. *Des Weiteren ist der Winkel* θ *eindeutig bestimmt, falls* $z \neq 0$.

6.6 Integration von Potenzreihen

6.6.1 Zwei Logarithmen auf der komplexen Zahlenebene

Satz 6.31. *Sei* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* R. *Dann definiert* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ *eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius* R *und*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

für alle $a, b \in (-R, R)$.

Korollar 6.32. *Für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *gelten die Integrationsformeln*

$$\begin{aligned} \int_a^b \exp(x)\,\mathrm{d}x &= \exp(b) - \exp(a) \\ \int_a^b \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(b) + \cos(a) \\ \int_a^b \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \sin(b) - \sin(a) \\ \int_a^b \sinh(x)\,\mathrm{d}x &= \cosh(b) - \cosh(a) \\ \int_a^b \cosh(x)\,\mathrm{d}x &= \sinh(b) - \sinh(a) \end{aligned}$$

6.7 Ziffernentwicklungen und fraktale Konstruktionen

6.7.1 Peanos raumfüllende Kurve

Lemma 6.33. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ist die Abbildung* $x \in C \mapsto d_n(x) \in \{0, 2\}$ *stetig. Insbesondere ist die Abbildung* $\mathbf{f}_C : C \to [0,1]^2$ *stetig.*

Proposition 6.34. *Die Abbildung* $\mathbf{f}_P : [0,1] \to [0,1]^2$ *ist stetig und surjektiv.*

Kapitel 7

Differentialrechnung

7.1 Die Ableitung

7.1.1 Definition und geometrische Interpretation

Definition 7.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Wir sagen, dass f bei a **differenzierbar** ist, falls der Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{7.1}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir $f'(a)$ die **Ableitung** von f bei a. Falls f bei jedem Häufungspunkt von D in D differenzierbar ist, dann sagen wir auch, dass f (auf D) **differenzierbar** ist und nennen die Funktion $a \mapsto f'(a)$ definiert auf den Häufungspunkten von D in D die **Ableitung** von f.

Falls $a \in D$ ein rechtseitiger Häufungspunkt von D ist, dann ist f bei a **rechtsseitig differenzierbar**, wenn die **rechtsseitige Ableitung**

$$f'_+(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert. **Linksseitige Differenzierbarkeit** und die **linksseitige Ableitung** $f'_-(a)$ werden analog über die Bewegung $x \nearrow a$ definiert.

7.1.2 Beispiele und Ableitungsregeln

Proposition 7.2. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ bei a differenzierbar. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ bei a differenzierbar und es gilt*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Insbesondere ist jedes skalare Vielfache von f bei a differenzierbar und $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Dies gilt ebenso für komplexwertige Funktionen.

Korollar 7.3. *Reelle Polynome sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$(1)' = 0, \quad (x^n)' = nx^{n-1} \tag{7.2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 7.4. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ eine bei x_0 differenzierbare Funktion, so dass $y_0 = f(x_0)$ ein Häufungspunkt in E ist, und sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine bei y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Korollar 7.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Häufungspunkt und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ bei a differenzierbar. Falls $g(a) \neq 0$ ist, dann ist auch $\frac{f}{g}$ bei a differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Satz 7.6. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und sei $f : D \to E$ eine stetige, bijektive Abbildung, deren inverse Abbildung $f^{-1} : E \to D$ ebenfalls stetig ist. Falls f in dem Häufungspunkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$ gilt, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

VO 28. Nov.

7.1.3 Extremalwerte

Definition 7.7. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $x_0 \in D$. Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 ein **lokales Maximum** hat, falls es eine Umgebung U von x_0 in D gibt, auf der f durch $f(x_0)$ beschränkt ist. Genauer formuliert, heisst dies, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$. Falls es sogar ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ gilt, dann hat f in x_0 ein **isoliertes lokales Maximum**. Der Wert $f(x_0)$ wird auch ein **lokaler Maximalwert** von f genannt. Ein **lokales Minimum**, ein **isoliertes lokales Minimum** und ein **lokaler Minimalwert** von f sind analog definiert.

Des Weiteren nennen wir x_0 ein **lokales Extremum** von f und $f(x_0)$ einen **lokalen Extremwert** von f, falls f ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum in x_0 hat.

Proposition 7.8. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und f eine reellwertige Funktion auf D. Angenommen f ist in einem lokalen Extremum $x_0 \in D$ differenzierbar und x_0 ist sowohl ein rechtsseitiger als auch ein linksseitiger Häufungspunkt von D. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Korollar 7.9. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in I$ ein lokales Extremum von f. Dann bestehen genau folgende Möglichkeiten:*

(1) x_0 *ist ein in* I *enthaltener Endpunkt von* I,

(2) f *ist bei* x_0 *nicht differenzierbar oder*

(3) f *ist bei* x_0 *differenzierbar und* $f'(x_0) = 0$.

Insbesondere sind alle lokalen Extrema einer differenzierbaren Funktion auf einem offenen Intervall Nullstellen der Ableitung.

7.1.4 Ableitungen höherer Ordnung

Korollar 7.10. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *eine Teilmenge, so dass jeder Punkt in* D *ein Häufungspunkt von* D *ist. Seien* $f, g : D \to \mathbb{R}$ n*-mal differenzierbar. Dann sind* $f + g$ *und* $f \cdot g$ *ebenso* n*-mal differenzierbar und es gilt* $f^{(n)} + g^{(n)} = (f + g)^{(n)}$ *sowie*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Insbesondere ist jedes skalare Vielfache n*-mal differenzierbar und* $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Korollar 7.11. *Seien* $D, E \subseteq \mathbb{R}$ *Teilmengen, so dass jeder Punkt in* D *respektive* E *ein Häufungspunkt von* D *respektive* E *ist. Sei des Weiteren* $f : D \to E$ *eine* n*-mal differenzierbare Funktion und sei* $g : E \to \mathbb{R}$ *eine* n*-mal differenzierbare Funktion. Dann ist* $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ n*-mal differenzierbar.*

7.2 Zentrale Sätze der Differentialrechnung

7.2.1 Der Mittelwertsatz

Satz 7.12. *Sei* $[a, b]$ *ein abgeschlossenes Intervall mit* $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall* (a, b) *differenzierbar ist. Falls* $f(a) = f(b)$, *dann existiert ein* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f'(\xi) = 0$.

Satz 7.13. *Sei* $[a, b]$ *ein abgeschlossenes Intervall mit* $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall* (a, b) *differenzierbar ist. Dann gibt es ein* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

7.2.2 Korollare des Mittelwertsatzes und Kurvendiskussion

Korollar 7.14. *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall mit Endpunkten* $a < b$ *und* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Dann ist* f *genau dann konstant, wenn* f *differenzierbar ist und* $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in I$.

Korollar 7.15. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\forall x \in I : f'(x) \geq 0 &\implies f \text{ ist monoton wachsend} \\
\forall x \in I : f'(x) > 0 &\implies f \text{ ist streng monoton wachsend} \\
\forall x \in I : f'(x) \leq 0 &\implies f \text{ ist monoton fallend} \\
\forall x \in I : f'(x) < 0 &\implies f \text{ ist streng monoton fallend.}
\end{aligned}$$

Korollar 7.16. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b$ und $x_0 \in I$ kein Endpunkt von I. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und zumindest auf $I \setminus \{x_0\}$ stetig differenzierbar.*

- *Angenommen der linke Endpunkt a liegt in I.*
  - *Falls $f'(a) > 0$ erfüllt ist, dann hat f in a ein isoliertes lokales Minimum.*
  - *Falls $f'(a) < 0$ erfüllt ist, dann hat f in a ein isoliertes lokales Maximum.*
- *Beim Punkt $x_0 \in I$ gelten folgende Kriterien.*
  - *Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ (oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$), dann ist x_0 kein lokales Extremum von f.*
  - *Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, dann nimmt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum an.*
  - *Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, dann nimmt f in x_0 ein isoliertes lokales Minimum an.*
  - *Falls f auf ganz I zweimal stetig differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) < 0$ gilt, dann nimmt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum an.*
  - *Falls f auf ganz I zweimal stetig differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$ sowie $f''(x_0) > 0$ gilt, dann nimmt f in x_0 ein isoliertes lokales Minimum an.*
- *Angenommen der rechten Endpunkt b liegt in I.*
  - *Falls $f'(b) > 0$ erfüllt ist, dann hat f in b ein isoliertes lokales Maximum.*
  - *Falls $f'(b) < 0$ erfüllt ist, dann hat f in b ein isoliertes lokales Minimum.*

7.2.3 Konvexität

Definition 7.17. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heisst f **konvex**, falls

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \tag{7.3}$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ und für alle $t \in [0,1]$. Wir sagen, dass f **streng konvex** ist, falls in (**??**) eine strikte Ungleichung gilt, wenn immer $x_1 \neq x_2$ und $t \in (0,1)$ (in diesem Falls ist $(1-t)x_1 + tx_2$

echt zwischen x_1 und x_2). Eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heisst (**streng**) **konkav**, wenn $f = -g$ (streng) konvex ist.

Lemma 7.18. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f genau dann konvex, wenn für alle $x, x_1, x_2 \in I$ gilt*

$$x_1 < x < x_2 \implies \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Des Weiteren ist f genau dann streng konvex, wenn

$$x_1 < x < x_2 \implies \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

gilt.

Proposition 7.19. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.*

Korollar 7.20. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Falls $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, dann ist f konvex. Falls $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f streng konvex.*

Lemma 7.21. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Seien $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^n t_k = 1$. Dann gilt*

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k). \tag{7.4}$$

7.2.4 Mittelwertsatz nach Cauchy

Satz 7.22. *Seien f und g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$, so dass f und g auf (a, b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)). \tag{7.5}$$

Falls zusätzlich $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann gilt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

7.2.5 Regel von de l'Hôpital

Satz 7.23. *Seien $a < b$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, sowie*

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Wir nehmen zusätzlich eine der beiden folgenden Bedingungen an

- *("$\frac{0}{0}$") $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$*
- *("$\frac{\infty}{\infty}$") $\lim_{x \searrow a} g(x) = +\infty$ (oder $\lim_{x \searrow a} g(x) = -\infty$).*

Dann gilt auch $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Analoge Aussagen gelten für die Bewegungen $x \nearrow b$ oder $x \to x_0 \in (a,b)$. Im letzten Fall erlauben wir $g(x_0) = g'(x_0) = 0$, solange $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$.

7.3 Erste Differentialgleichungen

7.3.1 Stammfunktionen

Lemma 7.24. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $F, F_1 : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f. Dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $F_1 = F + C$. In anderen Worten, alle Lösungen von $y' = f$ sind gegeben durch die Formel $y = F(x) + C$ wenn wir die Konstante $C \in \mathbb{R}$ variieren.*

7.3.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Lemma 7.25. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Die Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung $y' + f(x)y = 0$ sind genau die Vielfachen der Funktion $x \in I \mapsto \exp(-F(x))$.*

Lemma 7.26. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Falls es eine Lösung $y_{\mathrm{part}} : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' + fy = g$ gibt (die auch die **partikuläre** Lösung genannt wird), dann ist die allgemeine Lösung y_{inhom} von der Form $y_{\mathrm{inhom}} = y_{\mathrm{part}} + y_{\mathrm{hom}}$, wobei y_{hom} die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' + f(x)y = 0$ ist.*

7.3.3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Proposition 7.27. *Die komplexwertigen Funktionen $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \mathrm{e}^{\alpha x}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ bilden eine linear unabhängige Teilmenge des komplexen Vektorraum $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ der komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.*

Proposition 7.28. *Sei $p(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k \in \mathbb{C}[T]$ ein Polynom mit $a_n = 1$, das mittels $p(T) = \prod_{k=1}^K (T - \alpha_k)^{\ell_k}$ in Linearfaktoren zerfällt, wobei wir annehmen, dass $\alpha_j \neq \alpha_k$ für $j \neq k$. Dann hat die zugehörige homogene Differentialgleichung*

$$p(D)y = 0$$

die folgenden n linear unabhängigen Lösungen:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{e}^{\alpha_1 x}, & x\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, & \ldots, & x^{\ell_1 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_1 x} \\ \vdots & & & \\ \mathrm{e}^{\alpha_K x}, & x\mathrm{e}^{\alpha_K x}, & \ldots, & x^{\ell_K - 1}\mathrm{e}^{\alpha_K x} \end{array}$$

Kapitel 8

Die Ableitung und das Riemann-Integral

8.1 Der Fundamentalsatz der Integral- und Differentialrechnung

Definition 8.1. Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und sei $f \in R([a, b])$ eine auf $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktion. Die Funktion

$$x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

nennt sich das **Integral mit veränderlichen oberen Grenze** von f.

Satz 8.2. *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $f \in R([a, b])$ eine auf $[a, b]$ Riemann-integrierbare Funktion. Falls f bei $x_0 \in [a, b]$ stetig ist, so ist $F : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ bei x_0 differenzierbar und $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Korollar 8.3. *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $f \in C([a, b])$ stetig. Dann ist $x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von f und jede Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ von f hat die Form*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C \tag{8.1}$$

für alle $x \in [a, b]$ und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Korollar 8.4. *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $f \in C([a, b])$ stetig. Falls $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist, dann gilt*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Korollar 8.5. *Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a<b$ und sei $F \in C^1([a,b])$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in [a,b]$.

8.1.1 Differentiation von Potenzreihen

Korollar 8.6. *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$. Dann ist $f : (-R,R) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

für alle $x \in (-R,R)$, wobei die Potenzreihe rechts ebenfalls Konvergenzradius R hat.

8.2 Intervallfunktionen und Anwendungen

Definition 8.7. Seien $a \leq b$ in $\mathbb{R}$ und sei $\mathcal{I} : (\alpha,\beta) \in [a,b]^2 \mapsto \mathcal{I}(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen $\mathcal{I}$ eine **additive Intervallfunktion** auf $[a,b]$, falls

(i) Für alle $\alpha \in [a,b]$ gilt $\mathcal{I}(\alpha,\alpha) = 0$.

(ii) Für alle $\alpha,\beta \in [a,b]$ gilt $\mathcal{I}(\alpha,\beta) = -\mathcal{I}(\beta,\alpha)$.

(iii) Für alle $\alpha,\beta,\gamma \in [a,b]$ mit $\mathcal{I}(\alpha,\beta) + \mathcal{I}(\beta,\gamma) = \mathcal{I}(\alpha,\gamma)$.

Proposition 8.8. *Seien $a<b$ in $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und $\mathcal{I}$ eine additive Intervallfunktion auf $[a,b]$. Angenommen es gilt*

$$(\beta-\alpha) \inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \leq \mathcal{I}(\alpha,\beta) \leq (\beta-\alpha) \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \tag{8.2}$$

für alle $\alpha<\beta$ in $[a,b]$. Dann ist

$$\mathcal{I}(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $\alpha,\beta \in [a,b]$.

8.2.1 Bogenlänge

Lemma 8.9. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbarer Weg für $a<b$. Dann hat jede Reparametrisierung von γ dieselbe Bogenlänge. Falls γ regulär ist, gibt es eine Reparametrisierung von γ mit Einheitsgeschwindigkeit (die **Parametrisierung nach Bogenlänge**).*

8.3 Das uneigentliche Integral

8.3.1 Uneigentliche Integrationsgrenzen

Lemma 8.10. *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nicht-negative Funktion mit $f \in R([a, b])$ für alle $b > a$. Entweder konvergiert das uneigentliche Integral über f oder es divergiert gegen Unendlich. In beiden Fällen gilt*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \mid b > a\right\}.$$

Satz 8.11. *Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton fallende Funktion mit der Eigenschaft, dass $f_{[1,b]} \in R([1, b])$ für alle $b > 1$. Dann gilt*

$$\sum_{n=2}^\infty f(n) \leq \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Dies gilt analog für Integrale der Form $\int_N^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ und Reihen $\sum_{n=N}^\infty f(n)$ für $N \in \mathbb{N}$

8.4 Taylor Approximation

Satz 8.12. *Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes, nicht-leeres Intervall und sei $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ eine $(n + 1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt für alle $x \in (a, b)$*

$$f(x) = P^f_{x_0,n}(x) + R^f_{x_0,n}(x),$$

*wobei $P^f_{x_0,n}$ die n-te Taylor-Approximation ist und wir den Fehlerterm $R^f_{x_0,n}$ durch das sogenannte **Integral-Restglied***

$$x \in (a, b) \mapsto R^f_{x_0,n}(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x - t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

darstellen können. Dies gilt auch für Funktionen auf $[x_0, b)$ und Punkte $x \in [x_0, b)$ (beziehungsweise $(a, x_0]$ und $x \in (a, x_0]$).

Korollar 8.13. *Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes, nicht-leeres Intervall, sei $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ eine $(n + 1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und seien $x_0, x \in (a, b)$ zwei Punkte. Wir setzen $M_{n+1} = \max\left\{|f^{(n+1)}(t)| \mid t \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x\right\}$. Dann gilt*

$$|f(x) - P^f_{x_0,n}(x)| = |R^f_{x_0,n}(x)| \leq \frac{M_{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Insbesondere ist $f(x) = P^f_{x_0,n}(x) + O((x - x_0)^{n+1})$ für $x \to x_0$.

8.5 Numerische Integration

Satz 8.14. *Seien $a < b$ reelle Zahlen, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$ die Schrittweite und $x_\ell = a + \ell h$ für $\ell \in \{0, \dots, n\}$.*

(a) (Rechtecksregel) Falls f stetig differenzierbar ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\big(f(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})\big) + F_1,$$

wobei der Fehler F_1 durch $|F_1| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ beschränkt ist.

(b) (Sehnentrapezregel) Falls f zweimal stetig differenzierbar ist, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= h\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right) + F_2 \\ &= \frac{h}{2}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big) + F_2,\end{aligned}$$

wobei der Fehler F_2 durch $|F_2| \leq \frac{(b-a)^3}{6n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ beschränkt ist.

(c) (Simpson-Regel) Falls f viermal stetig differenzierbar ist und n gerade ist, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\big(f(x_0) &+ 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots \\ &+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big) + F_3,\end{aligned}$$

wobei der Fehler F_3 durch $|F_3| \leq \frac{2(b-a)^5}{45n^4} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ beschränkt ist.

Kapitel 9

Metrische Räume

9.1 Definition metrischer Räume und Konvergenz

Definition 9.1. Ein **metrischer Raum** (X, d) ist eine Menge X gemeinsam mit einer Abbildung $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die die **Metrik** auf X genannt wird und die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

- (Definitheit) Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $\mathrm{d}(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$.
- (Symmetrie) Für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt $\mathrm{d}(x_1, x_2) = \mathrm{d}(x_2, x_1)$.
- (Dreiecksungleichung) Für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$ gilt $\mathrm{d}(x_1, x_3) \leq \mathrm{d}(x_1, x_2) + \mathrm{d}(x_2, x_3)$.

9.1.1 Konvergenz von Folgen

Definition 9.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_n$ eine Folge in X. Wir sagen, dass $(x_n)_n$ gegen einen Punkt $x_0 \in X$ **konvergiert**, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\mathrm{d}(x_n, x_0) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ oder $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Der Punkt x_0 nennt sich dabei der **Grenzwert** der Folge $(x_n)_n$.

9.1.2 Normen auf Vektorräumen

Definition 9.3. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : v \in V \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, die folgende drei Eigenschaften erfüllt.

- (Definitheit) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| = 0 \iff v = 0$.
- (Homogenität) Für alle $v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.
- (Dreiecksungleichung) Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.

Man nennt V gemeinsam mit der Norm $\|\cdot\|$ auch einen **normierten Vektorraum**.

Lemma 9.4. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Dann definiert*

$$\mathrm{d}(v_1, v_2) = \mathrm{d}_{\|\cdot\|}(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$$

für $v_1, v_2 \in V$ *eine Metrik* d *auf* V*, die man auch die von der Norm* $\|\cdot\|$ ***induzierte Metrik*** *auf* V *nennt.*

9.1.3 Die euklidsche Norm auf $\mathbb{C}^d$

Proposition 9.5. *Für alle* $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^d$ *gilt*

$$|\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{z}\|\|\mathbf{w}\|. \tag{9.1}$$

Des Weiteren gilt Gleichheit in (**??**) *genau dann, wenn* $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ *linear abhängig sind (das heisst, wenn* $\alpha \in \mathbb{C}$ *existiert mit* $\alpha\mathbf{z} = \mathbf{w}$ *oder* $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{w}$*).*

Korollar 9.6. *Die Euklidsche Norm definiert eine Norm auf* $\mathbb{C}^d$*.*

Definition 9.7. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf V. Wir nennen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ **äquivalent**, falls Konstanten $C, C' > 0$ existieren mit

$$C\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C'\|v\|_1$$

für alle $v \in V$.

9.2 Topologische Grundbegriffe

9.2.1 Offene und abgeschlossene Teilmengen

Definition 9.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ heisst **offen**, falls es zu jedem Punkt in O einen offenen Ball um diesen Punkt gibt, der in O liegt. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Lemma 9.9. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Dann gilt*

- *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*
- *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*
- *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
- *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Lemma 9.10. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum.*

- *Eine Teilmenge* $O \subseteq X$ *ist genau dann offen, wenn für jede konvergente Folge in* X *mit Grenzwert in* O *fast alle Folgenglieder in* O *liegen.*
- *Eine Teilmenge* $A \subseteq X$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge* $(x_n)_n$ *in* X *mit* $x_n \in A$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *auch der Grenzwert in* A *liegt.*

9.2.2 Häufungspunkte und Dichtheit

Definition 9.11. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Punkt $x_0 \in X$ ist ein **Häufungspunkt einer Folge** $(x_n)_n$ in X, falls es eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) gibt mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Ein Punkt $x_0 \in X$ ist ein **Häufungspunkt einer Teilmenge** $D \subseteq X$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ der Durchschnitt $D \cap (B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\})$ nicht-leer ist. Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heisst **dicht**, falls für jedes $x_0 \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ der Durchschnitt $D \cap B_\varepsilon(x_0)$ nicht-leer ist.

9.2.3 Zusammenhang

Definition 9.12. Sei (X, d) ein nicht-leerer metrischer Raum. Wir nennen (X, d) **zusammenhängend**, falls es keine zwei offene nicht-leere Teilmengen $O_1, O_2 \subseteq X$ gibt mit $X = O_1 \sqcup O_2$.

Proposition 9.13. *Eine nicht-leere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X ein Intervall ist.*

Lemma 9.14. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und Y_1, Y_2 zwei zusammenhängende Teilräume. Falls ihr Schnitt $Y_1 \cap Y_2$ nicht-leer ist, dann ist die Vereingung $Y_1 \cup Y_2$ zusammenhängend.*

9.3 Stetigkeit

Definition 9.15. Seien $(X, \mathrm{d}_X), (Y, \mathrm{d}_Y)$ zwei metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Wir sagen, dass f bei $x_0 \in X$ **ε-δ-stetig** ist, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in B_\delta(x_0)$ auch $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$ gilt. Wir sagen, dass f bei $x_0 \in X$ **folgenstetig** ist, falls für jede konvergente Folge $(x_n)_n$ in X mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge $(f(x_n))_n$ konvergiert und Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ hat.

Lemma 9.16. *Seien X und Y zwei metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Funktion und $x_0 \in X$ ein Punkt. Dann ist f genau dann bei x_0 ε-δ-stetig, wenn f bei x_0 folgenstetig ist.*

Proposition 9.17. *Seien X, Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *Die Funktion f ist stetig.*

(ii) *Für jedes $x \in X$ ist f bei x ε-δ-stetig.*

(iii) *Für jedes $x \in X$ ist f bei x folgenstetig.*

(iv) *Für jede offene Teilmenge $O \subseteq Y$ ist $f^{-1}(O)$ eine offene Teilmenge von X.*

(v) *Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ ist $f^{-1}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

Proposition 9.18. *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Falls X zusammenhängend ist, dann ist das Bild $f(X)$ ein zusammenhängender Teilraum von Y.*

Korollar 9.19. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $x \in I$ zwischen a und b, so dass $f(x) = c$ gilt.*

Definition 9.20. Sei X ein nicht-leerer metrischer Raum.

- Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to X$ auf einem nicht-leeren Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit **Startpunkt** $\gamma(a)$ und **Endpunkt** $\gamma(b)$. Dabei sagen wir auch, dass γ ein Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ ist.

- Wir nennen X **wegzusammenhängend**, falls für je zwei Punkte $x, y \in X$ ein Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ von x nach y existiert.

Lemma 9.21. *Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist zusammenhängend.*

Proposition 9.22. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \geq 1$ eine nicht-leere, offene Teilmenge. Dann ist O genau dann wegzusammenhängend, wenn O zusammenhängend ist.*

Definition 9.23. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heisst f **gleichmässig stetig**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $\mathrm{d}_X(x_1, x_2) < \delta$ auch $\mathrm{d}_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ gilt. Des Weiteren heisst f **Lipschitz-stetig**, falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit $\mathrm{d}_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L\mathrm{d}_X(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.

9.4 Vollständigkeit

Definition 9.24. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in X heisst **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq N$ die Abschätzung $\mathrm{d}(x_n, x_m) < \varepsilon$ gilt. Der metrische Raum heisst **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Proposition 9.25. *Sei $d \geq 1$. Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist vollständig.*

9.4.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Satz 9.26. *Sei (X, d) ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum. Sei $T : X \to X$ eine **Lipschitz-Kontraktion**, das heisst, eine Abbildung mit der Eigenschaft*

$$\mathrm{d}(T(x_1), T(x_2)) \leq \lambda \mathrm{d}(x_1, x_2)$$

*für alle $x_1, x_2 \in X$ und für eine fixe Lipschitz-Konstante $\lambda < 1$. Dann existiert ein eindeutiges $x_0 \in X$ mit $T(x_0) = x_0$ (ein **Fixpunkt** von T).*

9.4.2 Wahrscheinlichkeitsmatrizen*

Definition 9.27. Sei $d \geq 1$. Eine $d \times d$-Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{d,d}(\mathbb{R})$ heisst **nicht-negativ** (**positiv**), falls $A_{k\ell} \geq 0$ ($A_{k\ell} > 0$) für alle $k, \ell \in \{1, \ldots, d\}$ gilt. Eine nicht-negative Matrix $P \in \mathrm{Mat}_{d,d}(\mathbb{R})$ ist eine **Wahrscheinlichkeitsmatrix**, falls $\sum_{k=1}^{d} P_{k\ell} = 1$ für alle $\ell \in \{1, \ldots, d\}$ gilt. Ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ ist ein **Wahrscheinlichkeitsvektor**, falls $a_j \geq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$ und $\sum_{j=1}^{d} a_j = 1$. Ein Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ heisst **stationär** bezüglich einer Wahrscheinlichkeitsmatrix $P \in \mathrm{Mat}_{d,d}(\mathbb{R})$, falls $P\mathbf{a} = \mathbf{a}$ gilt (also falls $\mathbf{a}$ ein Eigenvektor von P zum Eigenwert 1 ist).

Korollar 9.28. *Sei $d \geq 1$ und $P \in \mathrm{Mat}_{d,d}(\mathbb{R})$ eine positive Wahrscheinlichkeitsmatrix. Dann existiert ein eindeutig bestimmter stationärer Wahrscheinlichkeitsvektor zu P, der auch $a_j > 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$ erfüllt.*

9.4.3 Der Raum der stetigen Funktionen

Proposition 9.29. *Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$. Dann ist für jedes $d \geq 1$ die Menge*

$$C(I, \mathbb{R}^d) = \Big\{ f : I \to \mathbb{R}^d \mid f \text{ ist stetig} \Big\}$$

mit den (punktweisen) Verknüpfungen $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$, $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ für f, g in $C(I, \mathbb{R}^d)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Vektorraum. Des Weiteren definiert

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_2$$

*eine Norm auf $C(I, \mathbb{R}^d)$ (die sogenannte **Supremumsnorm**) und $C(I, \mathbb{R}^d)$ ist bezüglich dieser Norm vollständig.*

9.5 Kompaktheit

Definition 9.30. Sei X ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X **folgenkompakt** oder kurz **kompakt** ist, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt. Ein Teilraum $K \subseteq X$ ist kompakt, falls er als eigenständiger metrischer Raum kompakt ist. Eine Teilmenge $B \subseteq X$ ist **beschränkt**, falls es ein Punkt $x_0 \in X$ und einen Radius $R > 0$ gibt, so dass B im Ball $B_R(x_0)$ enthalten ist.

Lemma 9.31. *Eine kompakte Teilmenge eines nicht-leeren metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.*

Satz 9.32. *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ für $d \geq 1$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

9.5.1 Bilder von kompakten Mengen

Satz 9.33. *Seien X, Y metrische Räume und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Falls X kompakt ist, so ist auch $f(X)$ kompakt.*

Korollar 9.34. *Sei X ein nicht-leerer kompakter metrischer Raum. Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt sowohl Maximum als auch Minimum an.*

9.5.2 Gleichmässige Stetigkeit

Proposition 9.35. *Seien X, Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Falls X kompakt ist, so ist f gleichmässig stetig.*

9.5.3 Überdeckungskompaktheit und totale Beschränktheit*

Definition 9.36. Sei X ein metrischer Raum. Dann heisst X **überdeckungskompakt**, falls es für jede Kollektion $\mathcal{O}$ offener Teilmengen von X mit $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} O = X$ endlich viele offene Mengen $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{O}$ mit $X = O_1 \cup \ldots \cup O_n$ gibt. Die Kollektion $\mathcal{O}$ offener Teilmengen von X mit $\bigcup_{O \in \mathcal{O}} O = X$ nennen wir auch eine **offene Überdeckung** von X und $\mathcal{O} = \{O_1, \ldots, O_n\} \subseteq \mathcal{O}$ mit $X = O_1 \cup \ldots \cup O_n$ eine **endliche Teilüberdeckung**. Der Raum X ist also genau dann überdeckungskompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Definition 9.37. Sei X ein metrischer Raum. Wir sagen, dass X **total beschränkt** ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Bälle von Radius ε gibt, die X überdecken (das heisst, es gibt $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$).

Satz 9.38. *Sei X ein metrischer Raum. Dann sind folgende drei Bedingungen äquivalent:*

(i) X ist überdeckungskompakt.

(ii) X ist folgenkompakt.

(iii) X ist vollständig und total beschränkt.

9.6 Fundamentalsatz der Algebra

Theorem 9.39. *Jedes komplexe Polynom $f \in \mathbb{C}[z]$ mit positivem Grad $n = \deg(f) \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Des Weiteren lässt sich f als Produkt eines Skalars $a_n \in \mathbb{C}^\times$ und Linearfaktoren $(x - \alpha_j)$ schreiben:*

$$f = a_n \prod_{j=1}^n (z - a_j)$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

9.7 Konstruktion der reellen Zahlen*

Satz 9.40. *Man kann ein Modell $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ der Axiome der reellen Zahlen (in Abschnitt **??**) unter Verwendung der natürlichen Zahlen (wie in Abschnitt **??**) definieren.*

Kapitel 10

Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

10.1 Differentialgleichungssysteme

10.1.1 Lineare Differentialgleichungssysteme

Proposition 10.1. *Sei* $A \in \mathrm{Mat}_{d,d}(\mathbb{R}), x_0 \in \mathbb{R}^d$ *und* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) = \exp(A(t - t_0))x_0,$$

wobei die Exponentialabbildung $\exp : \mathrm{Mat}_{d,d}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ *durch*

$$\exp(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n$$

für $B \in \mathrm{Mat}_{d,d}(\mathbb{R})$ *definiert ist.*

10.2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Theorem 10.2. *Es sei* $d \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *offen und* $f : U \to \mathbb{R}^d$ *stetig. Angenommen* f *ist "lokal Lipschitz-stetig im Ort", das heisst, für alle* $(t_0, x_0) \in U$ *existiert ein* $\varepsilon > 0$ *mit* $B_\varepsilon(t_0, x_0) \subseteq U$ *und* $M > 0$, *so dass für alle* $(t, x_1), (t, x_2) \in B_\varepsilon(t_0, x_0)$ *die Abschätzung*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$$

gilt. Sei weiters $t_0 \in \mathbb{R}$ *und ein Anfangswert* $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *mit* $(t_0, x_0) \in U$ *gegeben.*

Existenz: *Dann existiert ein Zeitintervall* $I = I_{\max} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *und eine differenzierbare Funktion* $x : I \to \mathbb{R}^d$ *mit*

- $(t, x(t)) \in U$ *für alle* $t \in I$,
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ *für alle* $t \in I$ *und*
- $x(t_0) = x_0$.

Eindeutigkeit: *Für jede weitere Lösung* $y : J \to \mathbb{R}^d$ *desselben Anfangswertproblems definiert auf einem offenen Intervall* J *mit* $t_0 \in J$ *gilt* $J \subseteq I$ *und* $x|_J = y$.

Maximalität: *Die Grenzwerte* $\lim_{t \searrow a} (t, x(t))$ *und* $\lim_{t \nearrow b} (t, x(t))$ *existieren in* U *nicht.*

Proposition 10.3. *Seien* $r_1, r_2 > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *und* $f : (t_0 - r_1, t_0 + r_1) \times B_{r_2}(x_0) \to \mathbb{R}^d$ *eine beschränkte stetige Funktion. Angenommen es gibt eine Lipschitz-Konstante* $M > 0$ *mit*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$$

für alle $t \in (t_0 - r_1, t_0 + r_1)$ *und* $x_1, x_2 \in B_{r_2}(x_0)$. *Dann existiert ein* $\delta \in (0, r_1)$ *und eine eindeutig bestimmte Lösung* $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^d$ *des Anfangswertproblems*

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \end{cases} \tag{10.1}$$

für $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Genauer formuliert, es existiert ein δ_0 *(welches von* r_1, r_2, *von der oberen Schranke von* $\|f(t, x)\|$ *für* $(t, x) \in (t_0 - r_1, t_0 + r_1) \times B_{r_2}(x_0)$ *und von der Lipschitz-Konstante* M *abhängt) so dass obige eindeutige Existenz auf allen Intervallen der Form* $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *für* $\delta \in (0, \delta_0]$ *gilt.*

10.2.1 Stetige Abhängigkeit*

Proposition 10.4. *Seien* U *und* f *wie in Theorem* **??**. *Sei* $(t_0, x_0) \in U$ *ein Anfangswerte und sei* x *eine auf dem kompakten Interval* $[a, b] \ni t_0$ *definierte Lösung zum Anfangswertproblem. Sei* $\varepsilon > 0$ *beliebig. Dann existiert ein* $\delta > 0$ *mit folgender Eigenschauft: Falls ein weiterer Anfangswert* $\tilde{x}_0$ *mit* $(t_0, \tilde{x}_0) \in U$ *die Abschätzung* $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$ *erfüllt, dann ist die zugehörige maximale Lösung* $\tilde{x}$ *ebenfalls auf dem Intervall* $[a, b]$ *definiert und erfüllt die Abschätzung* $\|x|_{[a,b]} - \tilde{x}|_{[a,b]}\|_\infty < \varepsilon$.

Kapitel 11

Mehrdimensionale Differentialrechnung

11.1 Die Ableitung

11.1.1 Der Definitionsbereich

Definition 11.1. Ein **Gebiet** in $\mathbb{R}^n$ ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

11.1.2 Definitionen

Definition 11.2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann heisst f bei $x_0 \in U$ **differenzierbar** (oder **ableitbar**), falls es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \alpha_f(x_0, h)$$

und $\alpha_f(x_0, h) = o(\|h\|)$ für $h \to 0$. Die lineare Abbildung L wird die **totale Ableitung**, das **Differential** oder die **Tangentialabbildung** genannt und als $\mathrm{D}_{x_0} f$, $\mathrm{d}f(x_0)$, $\mathrm{D}f(x_0)$ oder auch $f'(x_0)$ geschrieben. Weiter heisst f differenzierbar, falls f bei jedem Punkt in U differenzierbar ist.

Definition 11.3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ wird der Grenzwert

$$\partial_j f(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s e_j) - f(x_0)}{h}$$

die **partielle Ableitung** in der j-ten Koordinate (oder der Variable x_j) genannt, falls er existiert. Wir schreiben mitunter auch $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ oder $\partial_{x_j} f(x_0)$ für diesen Grenzwert. Existiert die partielle Ableitung in der j-ten Koordinate an jedem Punkt in U, so erhält man also eine Funktion $\partial_j f : U \to \mathbb{R}^m$.

Proposition 11.4. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ bei $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann existieren alle partiellen Ableitungen von f und die totale Ableitung $\mathrm{D}_{x_0} f$ ist durch diese* *eindeutig bestimmt. In der Tat gilt*

$$\mathrm{D}_{x_0} f = (\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_n f(x_0)) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

11.1.3 Reduktion der Dimension

Lemma 11.5. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann ist f genau dann bei $x_0 \in U$ differenzierbar, wenn die Komponenten $f_k = \pi_k \circ f$ für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ bei x_0 differenzierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$\mathrm{D}_{x_0} f = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{x_0} f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{D}_{x_0} f_m \end{pmatrix}.$$

Satz 11.6. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Falls für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung $\partial_j f$ auf ganz U existiert und eine stetige Funktion definiert, so ist f auf ganz U differenzierbar.*

Definition 11.7. Wir nennen eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ **stetig differenzierbar**, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung

$$x \in U \mapsto \mathrm{D}_x f \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$$

stetig ist.

11.2 Die Kettenregel und der Mittelwertsatz

11.2.1 Verknüpfungen differenzierbarer Funktionen

Satz 11.8. *Seien $k, m, n \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Weiter sei $f : U \to V$ bei x_0 differenzierbar und $g : V \to \mathbb{R}^k$ bei $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ bei x_0 differenzierbar und die totale Ableitung $\mathrm{D}_{x_0}(g \circ f)$ bei x_0 ist durch die Verknüpfungen der linearen Abbildungen*

$$\mathrm{D}_{x_0}(g \circ f) = \mathrm{D}_{f(x_0)} g \circ \mathrm{D}_{x_0} f \tag{11.1}$$

gegeben.

Definition 11.9. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Die **Ableitung** von f **entlang eines Vektors** $v \in \mathbb{R}^n$ ist an einer Stelle $x \in U$ durch

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

definiert, falls der Grenzwert existiert. Falls $\|v\| = 1$ gilt, so spricht man auch von der **Richtungsableitung** in der Richtung v.

11.2.2 Der Mittelwertsatz

Satz 11.10. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $x_0 + th \in U$ für alle $t \in [0,1]$ und ein $h \in \mathbb{R}^n$, dann gilt*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathrm{D}_\xi f(h) = \partial_h f(\xi)$$

für ein $\xi = x_0 + t_\xi h$ mit $t_\xi \in (0,1)$.

Korollar 11.11. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $\mathrm{D}_x f = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant.*

Korollar 11.12. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig, das heisst, für alle $x_0 \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ und eine Konstante $M \geq 0$, so dass*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Falls U zusätzlich konvex und die Ableitung beschränkt ist, dann ist f sogar Lipschitz-stetig.

11.3 Höhere Ableitungen und Taylor-Approximation

11.3.1 Definition und Eigenschaften der höheren partiellen Ableitungen

Definition 11.13. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Wir sagen, dass f **zweimal stetig differenzierbar** ist, falls f stetig differenzierbar ist und für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung $\partial_k f : U \to \mathbb{R}^m$ wiederum eine stetige partielle Ableitung $\partial_j \partial_k f$ besitzt. Im Allgemeinen heisst f **d-mal stetig differenzierbar** für ein $d \geq 2$, falls f stetig differenzierbar ist und für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung $(d-1)$-mal stetig differenzierbar ist. Weiter sei

$$C^d(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } d\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$

die Menge der d-mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf U. Wir sagen, dass eine iterierte partielle Ableitung einer d-mal stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ **Ordnung** ℓ für $\ell \in \{1, \ldots, d\}$ hat, falls genau ℓ partielle Ableitungen auf f angewandt wurden. Wir sagen die Funktion f ist **glatt** falls sie beliebig oft (also für alle $d \in \mathbb{N}$ d-mal) stetig differenzierbar ist.

Satz 11.14. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$$

auf ganz U.

Korollar 11.15. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ d-mal stetig differenzierbar. Dann spielt die Reihenfolge der partiellen Ableitungen (bis zur Ordnung d) keine Rolle.*

11.3.2 Mehrdimensionale Taylor-Approximation

Satz 11.16. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(d+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + th \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} \big(\partial_h^k f\big)(x) + R_{x,d}^f(h),$$

wobei das Integralrestglied $R_{x,d}^f$ durch

$$R_{x,d}^f(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{d!} \big(\partial_h^{d+1} f\big)(x+th)\,\mathrm{d}t.$$

gegeben ist. Insbesondere ist

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} \big(\partial_h^k f\big)(x) + O(\|h\|^{d+1}).$$

Korollar 11.17. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x \in U$*

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + O(\|h\|^2)$$

und genauer

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \tfrac{1}{2} h^t H(x) h + o(\|h\|^2)$$

für $h \to 0$, wobei $H(x)$ wieder die Hesse-Matrix von f bei x darstellt.

11.4 Extremwerte

Definition 11.18. Sei f eine reellwertige Funktion auf einer Menge X. Dann sagen wir, dass f in $x_{\max} \in X$ ein **Maximum annimmt**, falls $f(x) \le f(x_{\max})$ für alle $x \in X$ gilt. Die Funktion f nimmt ein **striktes Maximum** in $x_{\max} \in X$ an, falls $f(x) < f(x_{\max})$ für alle $x \in X \setminus \{x_{\max}\}$ gilt. In beiden Fällen bezeichnen wir $f(x_{\max})$ als das **Maximum** von f. Analoge Begriffe definiert man für das **Minimum**. In beiden Fällen sprechen wir von **(globalen) Extremwerten**.

Sei nun X ein metrischer Raum. Dann sagen wir, dass f in $x_{\max} \in X$ ein **lokales Maximum annimmt**, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \le f(x_{\max})$ für alle $x \in B_\delta(x_{\max})$. Weiter nimmt f in $x_{\max} \in X$ ein **striktes lokales Maximum** an, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) < f(x_{\max})$ für alle $x \in B_\delta(x_{\max}) \setminus \{x_{\max}\}$. In beiden Fällen wird $f(x_{\max})$ als **lokales**

Maximum bezeichnet. Die Definition eines **lokalen Minimum** ist analog und beide werden als **lokale Extremwerte** bezeichnet.

Proposition 11.19. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in U$ ein Punkt. Falls f in x_0 ein lokales Extremum annimmt und f in x_0 differenzierbar ist, so ist* $\mathrm{D}_{x_0} f = 0$.

Definition 11.20. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ein Punkt $x \in U$ heisst **kritischer Punkt** von f, falls $\mathrm{D}_x f = 0$. Ist allgemeiner f eine differenzierbare Abbildung von U nach $\mathbb{R}^m$, so ist $x \in U$ ein kritischer Punkt, falls $\mathrm{D}_x f$ Rang kleiner als $\min(m, n)$ hat.

Weiter nennt man $x \in U$ einen **regulären Punkt** der Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$, falls x kein kritischer Punkt von f ist. Das Bild eines kritischen Punktes unter f nennt man auch einen **kritischen Wert**; Punkte in $\mathbb{R}^m$ im Komplement der kritischen Werte von f heissen **reguläre Werte**.

Definition 11.21. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine **symmetrische Matrix** (das heisst, $A^t = A$). Dann nennt man die Abbildung

$$Q_A : v \in \mathbb{R}^n \mapsto v^t A v$$

die **zu A assozierte quadratische Form** in n Variablen. Die quadratische Form Q_A oder auch die Matrix A heisst

- **positiv definit**, falls $Q_A(v) > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- **negativ definit**, falls $Q_A(v) < 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
- **indefinit**, falls $w_-, w_+ \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $Q_A(w_+) > 0$ und $Q_A(w-) < 0$, und
- **nicht-degeneriert**, falls $\det(A) \neq 0$.

Korollar 11.22. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt und*

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x_0) h_i h_j$$

die quadratische Form assoziert zur Hesse-Matrix $H(x)$ von f bei x_0. Dann gilt

- *Ist Q positiv definit, so nimmt f bei x_0 ein striktes lokales Minimum an.*
- *Ist Q negativ definit, so nimmt f bei x_0 ein striktes lokales Maximum an.*
- *Ist Q indefinit, so hat f bei x_0 kein lokales Extremum.*

Satz 11.23. *Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt*

- *A ist genau dann positiv definit, wenn alle der folgenden Determinanten positiv sind:*

$$a_{11}, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , \quad \det(A).$$

- *A ist genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist, was genau wechselnden Vorzeichen der Determinanten beginnend mit negativen Vorzeichen entspricht.*

- *Falls A nicht-degeneriert ist und weder positiv noch negativ definit ist, dann ist A indefinit.*

11.5 Parameterintegrale

Satz 11.24. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $a < b$ reelle Zahlen und $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert das Parameterintegral*

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

für $x \in U$ eine stetige Funktion $F : U \to \mathbb{R}$. Falls zusätzlich die partiellen Ableitungen $\partial_k f$ für $k = 1, \dots, n$ existieren und auf ganz $U \times [a, b]$ stetig sind, dann ist F stetig differenzierbar und es gilt

$$\partial_k F(x) = \int_a^b \partial_k f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in U$ und $k \in \{1, \dots, n\}$.

Korollar 11.25. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : U \times (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig mit stetigen partiellen Ableitungen $\partial_k f$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Seien des Weiteren $\alpha, \beta : U \to (a, b)$ stetig differenzierbar. Dann ist das Parameterintegral mit veränderlichen Grenzen*

$$F : x \in U \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

stetig differenzierbar und für $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\partial_k F(x) = f(x, \beta(x))\,\partial_k \beta(x) - f(x, \alpha(x))\,\partial_k \alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_k f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in U$.

11.6 Wegintegrale

11.6.1 Skalare Wegintegrale

Definition 11.26. Ein (wie immer stetiger) Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heisst **stückweise (stetig) differenzierbar**, falls eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{a = s_0 < \ldots < s_K = b\}$ von $[a,b]$ existiert, so dass $\gamma|_{[s_{k-1},s_k]}$ für alle $k \in \{1,\ldots,K\}$ stetig differenzierbar ist. Die Länge des stückweise differenzierbaren Weges γ ist definiert durch

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{K} L(\gamma_k) = \sum_{k=1}^{K} \int_{s_{k-1}}^{s_k} \left\|(\gamma|_{[s_{k-1},s_k]})'(s)\right\| \,\mathrm{d}s.$$

Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ wie oben werden wir eine für die stückweise differenzierbare Funktion **erlaubte Zerlegung** nennen.

11.6.2 Wegintegrale von Vektorfeldern

Definition 11.27. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Wir definieren das **Wegintegral des Vektorfelds** f entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to U$ durch

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_a^b \left\langle f(\gamma(s)), \gamma'(s)\right\rangle \mathrm{d}s$$

Ist $\gamma : [a,b] \to U$ stückweise differenzierbar und $\mathfrak{Z} = \{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_K\}$ eine erlaubte Zerlegung von $[a,b]$ für γ, so setzt man wiederum

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{K} \int_{\gamma|_{[s_{k-1},s_k]}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Lemma 11.28. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbarer Weg für $a < b$. Dann ändert sich der Wert des Wegintegrals $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ nicht unter (orientierungserhaltenden) Reparametrisierungen von γ.*

Weiter gilt für den umgekehrten Weg $\tilde{\gamma} : t \in [-b,-a] \mapsto \gamma(-t)$ mit $\tilde{\gamma}(-b) = \gamma(b)$ und $\tilde{\gamma}(-a) = \gamma(a)$

$$\int_{\tilde{\gamma}} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

11.7 Konservative Vektorfelder

Definition 11.29. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heisst f **konservativ**, falls Wegintegrale des Vektorfelds f nur Anfangs- und Endpunkt abhängen. Genauer formuliert, falls für alle stückweise stetig differenzierbaren Wege $\gamma : [a,b] \to U$ und

$\eta : [a', b'] \to U$ mit $\gamma(a) = \eta(a')$ und $\gamma(b) = \eta(b')$ gilt

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_\eta f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Satz 11.30. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist f genau dann konservativ, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \nabla F(x)$ für alle $x \in U$ gibt.*

Des Weiteren gelten für ein stetig differenzierbares konservatives Vektorfeld f und deren Komponenten $f_1, \ldots, f_n$ die (partiellen) Differentialgleichungen

$$\partial_j f_k = \partial_k f_j$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

11.7.1 Integrabilitätsbedingungen

Satz 11.31. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Dann ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ, wenn f den Integrabilitätsbedingungen*

$$\partial_k f_j = \partial_j f_k$$

für $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ genügt.

Kapitel 12

Anfänge der Differentialgeometrie

12.1 Sätze zur impliziten Funktion und zur inversen Abbildung

12.1.1 Satz zur impliziten Funktion

Satz 12.1. *Sei $r > 0$ ein Radius und seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ Punkte. Wir betrachten die offene Teilmenge*

$$B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \|x - x_0\| < r \text{ und } \|y - y_0\| < r\}$$

von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Angenommen die stetige Funktion $F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \to \mathbb{R}^m$ erfüllt die folgenden drei Bedingungen:

- *$F(x_0, y_0) = 0$.*
- *Die partiellen Ableitungen*

  $$\partial_{y_k} F : B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0) \to \mathbb{R}^m$$

  existieren für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ und sind auf $B_r^{\mathbb{R}^n}(x_0) \times B_r^{\mathbb{R}^m}(y_0)$ stetig.
- *Die totale Ableitung A bei y_0 der Abbildung $y \in B_r(y_0) \mapsto F(x_0, y)$ ist invertierbar, das heisst, die Matrix $A = (\partial_{y_k} F_j(x_0, y_0))_{j,k} \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ hat nicht-verschwindende Determinante.*

Dann existiert ein offener Ball $U_0 = B_\alpha(x_0)$ um x_0 und ein offener Ball $V_0 = B_\beta(y_0)$ um y_0 mit $\alpha, \beta \in (0, r)$ und eine stetige Funktion $f : U_0 \to V_0$, so dass für alle $(x, y) \in U_0 \times V_0$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ genau dann gilt, wenn $y = f(x)$ gilt. Insbesondere ist $f(x_0) = y_0$.

Satz 12.2. *Seien $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ und $F : B_r(x_0) \times B_r(y_0) \to \mathbb{R}^m$ mit den Eigenschaften aus dem vorherigen Satz und sei $f : U_0 \to V_0$ die stetige lokale Lösungsfunktion aus dem vorherigen Satz. Angenommen F ist d-mal stetig differenzierbar für $d \geq 1$. Dann ist die stetige Lösungsfunktion f ebenso d-mal stetig differenzierbar und die Ableitung von f bei $x \in U$ ist durch*

$$\mathrm{D}_x f = -((\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{y}} F)(x, f(x)))^{-1} (\boldsymbol{\partial}_{\mathbf{x}} F)(x, f(x)) \tag{12.1}$$

gegeben.

12.1.2 Satz zur inversen Abbildung

Satz 12.3. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine d-mal stetig differenzierbare Funktion mit $d \geq 1$. Sei $x_0 \in U$ mit invertierbarer totaler Ableitung $\mathrm{D}_{x_0} f \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ (das heisst, x_0 ist ein regulärer Punkt von f). Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ und eine offene Umgebung $V_0 \subseteq f(U)$ von $y_0 = f(x_0)$, so dass $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenso d-mal stetig differenzierbar ist. Des Weiteren gilt*

$$\mathrm{D}_y(f^{-1}) = (\,\mathrm{D}_x f)^{-1}$$

für alle $x \in U_0$ und $y = f(x) \in V_0$.

Definition 12.4. Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive, glatte Funktion $f : U \to V$ mit glatter Inversen $f^{-1} : V \to U$ wird ein (glatter) **Diffeomorphismus** genannt. Sind f und f^{-1} jeweils bloss d-mal stetig differenzierbar für $d \geq 1$, so nennen wir f einen **C^d-Diffeomorphismus**.

Korollar 12.5. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine d-mal stetig differenzierbare, injektive Funktion mit $d \geq 1$. Angenommen jeder Punkt $x \in U$ hat die Eigenschaft, dass $\mathrm{D}_x f$ invertierbar ist (oder in anderen Worten: jeder Punkt in U ist regulär). Dann ist $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ ist ein C^d-Diffeomorphismus mit*

$$\mathrm{D}_y(f^{-1}) = (\,\mathrm{D}_x f)^{-1}$$

für alle $x \in U$ und $y = f(x) \in V$.

12.2 Teilmannigfaltigkeiten des Euklidschen Raumes

12.2.1 Definition und Beispiele

Definition 12.6. Sei $0 \leq k \leq n$ für $n \geq 1$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale (glatte) **Teilmannigfaltigkeit**, falls es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p in $\mathbb{R}^n$ von p und einen Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \to V_p = \varphi(U_p)$ auf eine weitere offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$\varphi_p(U_p \cap M) = \{y \in V_p \mid y_i = 0 \text{ für alle } i > k\}\,.$$

12.2.2 Niveaumengen als Teilmannigfaltigkeiten

Satz 12.7. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq m < n$ und $F : U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion, so dass F keine kritischen Punkte in $M = \{p \in U \mid F(p) = 0\}$ besitzt (das heisst, $D_p F$ hat Rang m für alle $p \in M$ beziehungsweise 0 ist ein regulärer Wert von F). Dann ist M eine $(n-m)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.*

12.2.3 Tangentialraum und Tangentialbündel

Definition 12.8. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Der **Tangentialraum** von M bei $p \in M$ ist durch

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_p M &= \left\{ (p, \gamma'(0)) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ differenzierbar mit } \gamma(0) = p \right\} \\ &\subseteq \mathrm{T}_p \mathbb{R}^n = \{p\} \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

und das **Tangentialbündel** von M durch

$$\mathrm{T}M = \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{T}_p M \subseteq \mathrm{T}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

definiert.

Satz 12.9. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit.*

- *Sei $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung und sei $\varphi : U_0 \to V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus mit*

  $$\varphi(U_0 \cap M) = \{y \in V_0 \mid y_{k+1} = \ldots = y_n = 0\} = V_0 \cap \mathbb{R}^k$$

  *wie in Definition **??**. Wir definieren $\psi = \varphi^{-1} : V_0 \to U_0$ und die Ableitung*

  $$\begin{aligned} \mathrm{D}\psi : \mathrm{T}V_0 &\to \mathrm{T}U_0 \subseteq \mathrm{T}M \\ (y, h) &\mapsto (\psi(y), \mathrm{D}_y\psi(h)). \end{aligned}$$

  Dann ist die Einschränkung von $D\psi$ eine Bijektion von $\mathrm{T}(V_0 \cap \mathbb{R}^k) = (V_0 \cap \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k$ nach $\mathrm{T}(U_0 \cap M)$. Insbesondere ist $\mathrm{T}_p M$ ein k-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$ für alle $p \in M$.

- *Angenommen $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ ist gegeben als Niveaumenge einer glatten Funktion $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass 0 ein regulärer Wert von F ist (wie im Satz **??** des konstanten Ranges). Dann ist*

  $$\mathrm{T}M = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid \mathrm{D}_p F(v) = 0\}.$$

12.3 Extremwertprobleme

12.3.1 Extrema auf kompakten Teilmengen

Definition 12.10. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in B$ heisst **innerer Punkt von** B, falls es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq B$ gibt. Die Menge aller inneren Punkte

$$B^\circ = \{x \in B \mid \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq B\}$$

wird das **Innere** von B genannt. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ ist ein **Randpunkt von** B, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ die Durchschnitte $B_\varepsilon(p) \cap B \neq \emptyset$ und $B_\varepsilon(p) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \neq \emptyset$ nichtleer sind. Die Menge der Randpunkte

$$\partial B = \{p \in \mathbb{R}^n \mid B_\varepsilon(p) \cap B \neq \emptyset \neq B_\varepsilon(p) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \text{ für alle } \varepsilon > 0\}$$

wird als der **Rand** von B bezeichnet. Der **Abschluss** einer Menge wird durch $\overline{B} = B \cup \partial B$ definiert.

12.3.2 Extrema mit Nebenbedingungen und Lagrange-Multiplikatoren

Proposition 12.11. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $M \subseteq U$ eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Angenommen $f|_M$ nimmt in $p \in M$ ein lokales Extremum an. Dann ist $\nabla f(p)$ ein **Normalenvektor** an M bei p, das heisst, es gilt $\langle \nabla f(p), v\rangle = 0$ für alle $(p, v) \in \mathrm{T}_pM$.*

Definition 12.12. Die **Lagrange-Funktion** $L : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ ist für $(x, \lambda) \in U \times \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j F_j(x)$$

definiert. Die Komponenten von λ werden auch **Lagrange-Multiplikatoren** genannt.

Korollar 12.13. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit gegeben als Niveaumenge durch eine glatte Funktion $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit regulärem Wert 0 (siehe Satz **??**).*

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in $p \in M$ ein lokales Extremum annimmt. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$, so dass die Gleichungen

$$\partial_{x_i} L(p, \lambda) = 0, \quad \partial_{\lambda_j} L(p, \lambda) = 0$$

für $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, n-k\}$ und die zu M und f gehörige Lagrange-Funktion L erfüllt sind. Dabei ist zu $(x, \lambda) \in U \times \mathbb{R}^{n-k}$

$$\partial_{x_i} L(x, \lambda) = \partial_i f(x) - \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \partial_i F_j(x), \quad \partial_{\lambda_j} L(x, \lambda) = -F_j(x) \tag{12.2}$$

für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $j \in \{1, \ldots, n-k\}$.

12.3.3 Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen

Satz 12.14. *Jede symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. Des Weiteren existiert sogar eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A.*

Lemma 12.15. *Sei $n \geq 1$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann besitzt A einen reellen Eigenvektor.*

12.3.4 Eine hinreichende Bedingung für Lagrange-Multiplikatoren*

Korollar 12.16. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, sei $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit gegeben als Niveaumenge durch eine glatte Funktion $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit regulärem Wert 0 und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Sei des Weiteren $p \in M$ ein kritischer Punkt für $f|_M$ mit Lagrange-Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^{n-k}$, das heisst, (p, λ) erfüllt die Lagrange-Gleichungen*

$$\partial_{x_i} L(p, \lambda) = 0$$

für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir definieren eine quadratische Form $Q : \mathrm{T}_p M \to \mathbb{R}$ durch

$$Q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i} \partial_{x_j} L(p, \lambda) v_i v_j$$

für $(p, v) \in \mathrm{T}_p M$ (wobei $v_1, \ldots, v_n$ die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^n$ darstellen). Dann gelten folgende Aussagen:

- *Falls Q positiv definit ist, dann nimmt $f|_M$ bei p ein striktes lokales Minimum an.*
- *Falls Q negativ definit ist, dann nimmt $f|_M$ bei p ein striktes lokales Maximum an.*
- *Falls Q indefinit ist, dann nimmt $f|_M$ bei p kein lokales Extremum an.*

Kapitel 13

Mehrdimensionale Integralrechnung

13.1 Das Riemann-Integral für Quader

13.1.1 Definition

Definition 13.1. Für $n \geq 1$ und reelle Zahlen $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$ ist das **Volumen des abgeschlossenen n-dimensionalen Quaders**

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j \text{ für alle } j = 1, \ldots, n\}$$

und ebenso das **Volumen des offenen n-dimensionalen Quaders**

$$Q^\circ = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j < x_j < b_j \text{ für alle } j = 1, \ldots, n\}$$

durch

$$\mathrm{vol}(Q) = \mathrm{vol}(Q^\circ) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

definiert.

Definition 13.2. Für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$\mathfrak{Z}_k = \left\{a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < \ldots < x_{k,A(k)} = b_k\right\}$$

eine Zerlegung von $[a_k, b_k]$. Dann bezeichnen wir

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_n)$$

als eine **Zerlegung des Quaders** Q und die offenen Quader

$$Q_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_{1,\alpha_1 - 1}, x_{1,\alpha_1}) \times \ldots \times (x_{n,\alpha_n - 1}, x_{n,\alpha_n})$$

für $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_k \in \{1, \ldots, A(k)\}$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ als die der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ **entsprechenden offenen Teilquader**. Wir werden für die der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ entsprechenden offenen Teilquader kurz auch $Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}$ schreiben (für $\boldsymbol{\alpha}$ implizit wie oben).

Definition 13.3. Für eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auf dem Quader Q und eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q definieren wir die **Untersumme**

$$U(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}} \inf(f(Q_{\boldsymbol{\alpha}})) \operatorname{vol}(Q_{\boldsymbol{\alpha}})$$

und die **Obersumme**

$$O(f, \mathfrak{Z}) = \sum_{Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}} \sup(f(Q_{\boldsymbol{\alpha}})) \operatorname{vol}(Q_{\boldsymbol{\alpha}}).$$

Das **untere Integral** von f wird durch

$$\underline{I}(f) = \sup \{U(f, \mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ ist eine Zerlegung von } Q\}$$

und das **obere Integral** von f durch

$$\overline{I}(f) = \inf \{O(f, \mathfrak{Z}) \mid \mathfrak{Z} \text{ ist eine Zerlegung von } Q\}$$

definiert. Die Funktion f heisst **Riemann-integrierbar**, falls $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ gilt. Der gemeinsame Wert wird in diesem Fall als das **Riemann-Integral**

$$\int_Q f \,\mathrm{d}\operatorname{vol} = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

bezeichnet.

Lemma 13.4. *Seien $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_n)$ und $\mathfrak{Z}' = (\mathfrak{Z}'_1, \ldots, \mathfrak{Z}'_n)$ zwei Zerlegungen von dem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gilt $U(f, \mathfrak{Z}) \leq O(f, \mathfrak{Z}')$ für jede beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$. Falls des Weiteren $\mathfrak{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$ ist (das heisst, für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Zerlegung $\mathfrak{Z}'_k$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}_k$ ist), dann gilt*

$$U(f, \mathfrak{Z}) \leq U(f, \mathfrak{Z}') \leq O(f, \mathfrak{Z}') \leq O(f, \mathfrak{Z}).$$

Insbesondere gilt für eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ die Ungleichung $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$.

Proposition 13.5. *Sei f eine beschränkte reellwertige Funktion auf dem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q mit $O(f, \mathfrak{Z}) - U(f, \mathfrak{Z}) < \varepsilon$ existiert.*

13.1.2 Erste Eigenschaften

Proposition 13.6. *Seien f_1, f_2 Riemann-integrierbare reellwertige Funktionen auf dem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ und $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Linearkombination $s_1 f_2 + s_2 f_2$ Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_Q (s_1 f_1 + s_2 f_2) \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = s_1 \int_Q f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} + s_2 \int_Q f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}\,.$$

Proposition 13.7. *Sei Q ein n-dimensionaler Quader. Für zwei Riemann-integrierbare Funktionen $f_1, f_2 : Q \to \mathbb{R}$ gelten folgende Monotonie-Eigenschaften:*

(i) Falls $f_1 \geq 0$ ist, so gilt $\int_Q f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} \geq 0$.

(ii) Falls $f_1 \leq f_2$ ist, so gilt $\int_Q f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} \leq \int_Q f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$.

(iii) Die Funktion $|f_1| : Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar und es gilt die Dreiecksungleichung

$$\left| \int_Q f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} \right| \leq \int_Q |f_1| \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}\,.$$

13.1.3 Integrierbarkeit über Riemann-Summen

Definition 13.8. Für eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ des Quaders $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir die **Maschenweite der Zerlegung** $\mathfrak{Z}$ als

$$\begin{aligned} |\mathfrak{Z}| &= \max \{\text{grösste Kantenlänge von } Q_{\boldsymbol{\alpha}} \mid Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}\} \\ &= \max_{k=1,\ldots,n} \max_{\alpha_k=1,\ldots,A(k)} (x_{k,\alpha_k} - x_{k,\alpha_k-1}). \end{aligned}$$

Weiter bezeichnen wir $\mathbf{z} = (z_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha}}$ als eine **erlaubte Wahl von Zwischenpunkten** der Zerlegung $\mathfrak{Z}$, falls $z_{\boldsymbol{\alpha}} \in Q_{\boldsymbol{\alpha}} \cup \partial Q_{\boldsymbol{\alpha}}$ für alle $\boldsymbol{\alpha}$. Für eine reellwertige Funktion f auf Q, eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q und eine erlaubte Wahl von Zwischenpunkten $\mathbf{z}$ definieren wir die **Riemann-Summe** durch

$$R(f, \mathfrak{Z}, \mathbf{z}) = \sum_{Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}} f(z_{\boldsymbol{\alpha}}) \operatorname{vol}(Q_{\boldsymbol{\alpha}}).$$

Satz 13.9. *Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf dem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Riemann-Summen für gegen Null strebende Maschenweiten gegen eine reelle Zahl I (gegeben durch $I = \int_Q f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$) konvergieren. Genauer formuliert besagt letzteres, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von Q mit Maschenweite kleiner als δ und jede erlaubte Wahl $\mathbf{z}$ von Zwischenpunkten der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ die Abschätzung*

$$|R(f, \mathfrak{Z}, \mathbf{z}) - I| < \varepsilon$$

gilt.

13.2 Riemann-Integrierbarkeit und Stetigkeit

13.2.1 Stetigkeit als Voraussetzung

Proposition 13.10. *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader im $\mathbb{R}^n$. Dann ist jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auch Riemann-integrierbar.*

13.2.2 Nullmengen

Definition 13.11. Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ wird eine **Nullmenge** (genauer eine **Lebesgue-Nullmenge** im $\mathbb{R}^n$) genannt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge Q_k von offenen Quadern im $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$N \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q_\ell, \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_\ell) < \varepsilon \tag{13.1}$$

erfüllt sind.

Lemma 13.12. *Eine Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge. Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wiederum eine Nullmenge.*

Proposition 13.13. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei $(O_\ell)_\ell$ eine Folge offener Mengen mit $K \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{\infty} O_\ell$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{m} O_\ell$.*

Korollar 13.14. *Ein Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit nicht-leerem Inneren) ist keine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 13.15. *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist der Graph*

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in Q\}$$

von f eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

13.2.3 Charakterisierung mittels Stetigkeit

Satz 13.16. *Sei f eine beschränkte reellwertige Funktion auf einem Quader Q. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge*

$$N = \{x \in Q \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$$

eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ ist.

13.2.4 Oszillation einer Funktion

Definition 13.17. Sei f eine beschränkte reellwertige Funktion auf einem Quader Q. Für $x \in Q$ ist die **Oszillation** oder **Schwankung** von f bei x durch

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \searrow 0} \omega(f, x, \delta)$$

definiert, wobei für $\delta > 0$

$$\omega(f, x, \delta) = \sup f(Q \cap B_\delta^\infty(x)) - \inf f(Q \cap B_\delta^\infty(x)).$$

Hierbei ist $B_\delta^\infty(x) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times \cdots \times (x_n - \delta, x_n + \delta)$ der offene Ball bezüglich der Unendlich-Norm $\|\cdot\|_\infty$ mit Radius δ.

Lemma 13.18. *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Für jedes $\eta \geq 0$ ist die Menge $N_\eta = \{x \in Q \mid \omega(f, x) \geq \eta\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von Q.*

Proposition 13.19. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f : K \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Angenommen es gibt $\eta \geq 0$, so dass $\omega(f, x) \leq \eta$ für alle $x \in K$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in K$*

$$\omega(f, x, \delta) < \eta + \varepsilon$$

gilt.

13.2.5 Sandwich-Charakterisierung von Riemann-Integrierbarkeit*

Proposition 13.20. *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei stetige Funktionen $f_-, f_+ : Q \to \mathbb{R}$ gibt, die*

$$f_- \leq f \leq f_+ \qquad \textit{und} \qquad \int_Q (f_+ - f_-) \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} < \varepsilon$$

erfüllen.

13.3 Das Riemann-Integral über Jordan-messbare Mengen

Definition 13.21. Eine Teilmenge B von $\mathbb{R}^n$ heisst **Jordan-messbar**, falls es einen Quader Q in $\mathbb{R}^n$ mit $Q \supseteq B$ gibt, so dass die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_B = \chi_B$ auf Q Riemann-integrierbar ist. Das **Volumen** (der **Inhalt** oder das **Jordan-Mass**) ist in diesem Fall durch

$$\mathrm{vol}(B) = \int_Q \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$$

definiert.

Korollar 13.22. *Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn B beschränkt ist und der Rand ∂B eine Nullmenge ist. Falls $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar sind, so sind auch $B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2$ und $B_1 \setminus B_2$ Jordan-messbar.*

Schlussendlich gilt für einen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und zwei stetige Funktionen $f_-, f_+ : Q \to \mathbb{R}$ mit $f_- \leq f_+$, dass die Menge

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in Q,\ f_-(x) \leq y \leq f_+(x)\}$$

zwischen den Graphen von f_- und f_+ (siehe das folgende Bild) Jordan-messbar ist. Das gleiche gilt, wenn man den Quader Q durch eine beliebige Jordan-messbare Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und f_-, f_+ durch beschränkte stetige reellwertige Funktionen f_-, f_+ auf D mit $f_- \leq f_+$ ersetzt.

Definition 13.23. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Jordan-messbare Teilmenge und sei f eine reellwertige Funktion auf B. Dann heisst f **Riemann-integrierbar**, falls es einen abgeschlossenen Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ gibt, so dass die Funktion

$$x \in Q \mapsto (\mathbb{1}_B f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus B \end{cases}$$

auf Q Riemann-integrierbar ist.Wir schreiben in diesem Fall $f \in \mathcal{R}(B)$ und nennen

$$\int_B f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \int_Q \mathbb{1}_B f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$$

das **Riemann-Integral** von f über B.

Lemma 13.24. *Die Wahl des abgeschlossenen Quaders $Q \supseteq B$ in Definition* **??** *beinflusst die Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ und den Wert des Riemann-Integrals $\int_B f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$ nicht.*

Korollar 13.25. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und sei $f : B \to \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn f auf B fast überall stetig ist, das heisst, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge ist. Insbesondere ist jede beschränkte stetige Funktion auf einer Jordan-messbaren Menge Riemann-integrierbar.*

Korollar 13.26. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Jordan-messbare Teilmenge. Die Linearität des Riemann-Integrals (Proposition* **??***), die Monotonie und die Dreiecksungleichung (Proposition* **??***) gelten analog für das Riemann-Integral von Riemann-integrierbaren Funktionen auf B.*

Proposition 13.27. *Seien B_1, B_2 zwei beschränkte, Jordan-messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und sei $f : B_1 \cup B_2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, Riemann-integrierbare Funktion. Dann sind $f|_{B_1} \in \mathcal{R}(B_1)$, $f|_{B_2} \in \mathcal{R}(B_2)$ und $f|_{B_1 \cap B_2} \in \mathcal{R}(B_1 \cap B_2)$ ebenso Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_{B_1 \cup B_2} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \int_{B_1} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} + \int_{B_2} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} - \int_{B_1 \cap B_2} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}\,.$$

Definition 13.28. Eine Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst eine **Jordan-Nullmenge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Liste $Q_1, \ldots, Q_L \subseteq \mathbb{R}^n$ offener Quader gibt, so dass

$$\mathcal{J} \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{L} Q_\ell, \quad \sum_{\ell=1}^{L} \mathrm{vol}(Q_\ell) < \varepsilon$$

gilt.

13.4 Der Satz von Fubini

Satz 13.29. *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ zwei abgeschlossene Quader und sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann existiert das* ***Parameterintegral***

$$x \in X \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(y)$$

für fast alle $x \in X$ und es gilt

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}((x,y)) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(y)\right] \mathrm{d}\,\mathrm{vol}(x).$$

Genauer formuliert, definieren wir die Funktionen $f_x : y \in Y \mapsto f(x,y)$ sowie

$$F : x \in X \mapsto \underline{I}(f_x) = \begin{cases} \int_Y f_x(y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(y) & \text{falls } f_x \text{ Riemann-integrierbar ist} \\ \underline{I}(f_x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist F auf X Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}((x,y)) = \int_X F(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(x).$$

Selbiges gilt, wenn man in der Definition von F das untere Integral durch das obere Integral ersetzt.

Korollar 13.30. *Sei $Q = [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ ein n-dimensionaler Quader und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\int_Q f\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1,$$

wobei dieselben formalen Komplikationen wie in Satz **??** *auftreten können.*

Korollar 13.31. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine Jordan-messbare Menge, seien $\varphi_-, \varphi_+ : D \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig mit $\varphi_- \le \varphi_+$ und sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ die Jordan-messbare Teilmenge*

$$B = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid \varphi_-(x) \le y \le \varphi_+(x)\}.$$

Für eine Riemann-integrierbare Funktion f auf B gilt

$$\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}((x,y)) = \int_D \int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

wobei wieder die selben Komplikationen wie in Satz **??** *auftreten können.*

Korollar 13.32. *Falls $B \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^{n-1}$ beschränkt und Jordan-messbar ist, dann ist*

$$\mathrm{vol}(B) = \int_a^b \mathrm{vol}(B_x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei für $x \in [a,b]$ die Teilmenge $B_x \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ durch

$$B_x = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x,y) \in B\}$$

gegeben ist und für fast alle $x \in [a,b]$ Jordan-messbar ist.

13.5 Mehrdimensionale Substitutionsregel

13.5.1 Lineare Substitution

Proposition 13.33. *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und sei L in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann ist das Bild $L(Q)$ von Q unter L Jordan-messbar und es gilt*

$$\mathrm{vol}(L(Q)) = |\det(L)| \,\mathrm{vol}(Q).$$

Definition 13.34. Zu Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ wird

$$\mathrm{gram}(v_1, \ldots, v_n) = \det(\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}$$

die **Gramsche Determinante** von $v_1, \ldots, v_n$ genannt.

Korollar 13.35. *Sei $L \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ mit Spalten $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das* ***Parallelotop***

$$P = L([0,1]^n) = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i v_i \mid s_1, \ldots, s_n \in [0,1] \right\}$$

Jordan-messbar und es gilt

$$\mathrm{vol}(P) = \mathrm{vol}(L([0,1]^n)) = |\det(L)| = \sqrt{\mathrm{gram}(v_1, \ldots, v_n)}.$$

13.5.2 Substitution mit Diffeomorphismen

Satz 13.36. *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte Jordan-messbare offene Teilmengen und sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus. Des Weiteren sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, deren* ***Träger***

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{y \in Y \mid f(y) \neq 0\}}$$

eine kompakte Teilmenge von Y ist. Dann ist die Funktion $x \in X \mapsto (f \circ \Phi(x)) |\det(\mathrm{D}_x \Phi)|$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Y f(y) \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(y) = \int_X (f \circ \Phi(x)) |\det(\mathrm{D}_x \Phi)| \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(x),$$

wobei die Funktion $x \in X \mapsto \det(\mathrm{D}_x \Phi)$ als die ***Jacobi-Determinante*** *von Φ bezeichnet wird.*

13.5.3 Beweis der Substitutionsregel mit kompakten Träger

Lemma 13.37. *Sei $\ell > 0$, sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und sei*

$$Q_0 = x_0 + [-\ell, \ell]^n$$

*der **achsenparallele** (n-**dimensionale**) **Würfel** mit Seitenlängen gleich 2ℓ und Mittelpunkt x_0. Sei $X \supseteq Q_0$ eine offene Obermenge und sei $\Phi : X \to Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus. Wir setzen $y_0 = \Phi(x_0)$, $L = \mathrm{D}_{x_0}\Phi$ und*

$$\sigma = \max_{x \in Q_0} \| \mathrm{D}_x \Phi - L\|. \tag{13.2}$$

Falls $s = \sigma \|L^{-1}\| \sqrt{n} < 1$ ist, dann gilt

$$y_0 + (1-s)L(Q_0 - x_0) \subseteq \Phi(Q_0) \subseteq y_0 + (1+s)L(Q_0 - x_0). \tag{13.3}$$

Lemma 13.38. *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte offene Teilmengen, sei $\Phi : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus, sei $K \subseteq Y$ eine kompakte Teilmenge und sei $K_0 = \Phi^{-1}(K)$. Dann es gibt es ein $\delta_0 > 0$, so dass alle abgeschlossenen Quader Q mit maximaler Kantenlänge kleiner als δ_0 und mit $Q \cap K_0 \neq \emptyset$ in der kompakten Menge $K_1 = K_0 + \overline{B^\infty_{\delta_0}(0)}$ enthalten sind, welche ihrerseits in X liegt.*

Lemma 13.39. *Seien X, Y, $\Phi : X \to Y$, $K \subseteq Y$ und $\delta_0 > 0$ wie in Lemma **??**. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta < \delta_0$ mit folgender Eigenschaft. Ist Q_0 ein Würfel mit Kantenlänge kleiner als δ, mit $Q_0 \cap \Phi^{-1}(K) \neq \emptyset$ und mit Mittelpunkt x_0, so existieren Parallelotope P^+, P^-, die*

$$P^- \subseteq \Phi({Q_0}^\circ) \subseteq \Phi(Q_0) \subseteq P^+$$

und ebenso die Abschätzungen

$$\mathrm{vol}(P^-) > (1-\varepsilon)|\det D_{x_0}\Phi| \,\mathrm{vol}(Q_0),$$
$$\mathrm{vol}(P^+) < (1+\varepsilon)|\det D_{x_0}\Phi| \,\mathrm{vol}(Q_0)$$

erfüllen.

Lemma 13.40. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Jordan-messbare, offene Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in U. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ stetige Funktionen $f_-, f_+ : U \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in U existieren, die $f_- \leq f \leq f_+$ sowie $\int_U (f_+ - f_-) \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} < \varepsilon$ erfüllen.*

13.6 Uneigentliche Mehrfachintegrale

13.6.1 Ausschöpfungen und uneigentliche Integrale

Definition 13.41. Eine **Ausschöpfung** einer Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Folge Jordan-messbarer Teilmengen $(B_m)_m$ mit

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots \qquad \text{und} \qquad B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Definition 13.42. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, die eine Ausschöpfung besitzt, und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f auf B **uneigentlich Riemann-integrierbar** ist, falls B eine Ausschöpfung $(B_m)_m$ besitzt, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Einschränkung f_{B_m} Riemann-integrierbar ist, der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$ existiert und von der Wahl der Ausschöpfung $(B_m)_m$ mit obiger Eigenschaft unabhängig ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\int_B f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$$

für das **uneigentliche Riemann-Integral** von f über B.

Proposition 13.43. *Sei B eine Jordan-messbare Teilmenge, sei $(B_m)_m$ eine Ausschöpfung von B und sei $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt*

$$\mathrm{vol}(B) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{vol}(B_m)$$
$$\int_B f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$$

Satz 13.44. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, sei $(B_m)_m$ eine Ausschöpfung von B und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Funktion so dass $f|_{B_m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ Riemann integrierbar ist. Angenommen f ist nicht-negativ und der Grenzwert $I = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$ existiert. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{\ell\to\infty} \int_{A_\ell} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}$ für jede weitere Ausschöpfung $(A_\ell)_\ell$ mit der Eigenschaft, dass $f|_{A_\ell}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ Riemann-integrierbar ist, und ist gleich I. Insbesondere ist f auf B uneigentlich Riemann-integrierbar und das uneigentliche Riemann-Integral ist gleich I.*

13.6.2 Substitution für uneigentliche Riemann-Integrale

Satz 13.45. *Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus. Weiter sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass f und $|f|$ auf Y eigentlich oder uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Dann ist die Funktion $(f \circ \Phi)|\det(\mathrm{D}\Phi)|$ zumindest uneigentlich Riemann-integrierbar auf X und es gilt*

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \int_X (f \circ \Phi)|\det(\mathrm{D}\Phi)| \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}\,.$$

Kapitel 14

Mehrdimensionale Integralsätze

14.1 Der Divergenzsatz und der Satz von Green in der Ebene

14.1.1 Der Divergenzsatz für Rechtecke und Bereiche unter einem Graphen

Proposition 14.1. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein achsenparalleler Quader, sei $U \supseteq B$ eine offene Menge im $\mathbb{R}^2$ und sei $f = (f_1, f_2)^t : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann existiert für alle $p \in U$ die sogenannte **Divergenz** oder **Quellenstärke***

$$(\operatorname{div}(f))(p) = \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h^2} \int_{\partial(p+[0,h]^2)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$$

und ist durch

$$\operatorname{div}(f) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$$

gegeben. Des Weiteren gilt

$$\int_B \operatorname{div}(f) \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} \tag{14.1}$$

Proposition 14.2. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U. Seien $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen, so dass $[a, b] \times [c, d] \subseteq U$ ist, und sei $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ stetig und stückweise stetig differenzierbar. Für den Bereich*

$$B = \{(x, y) \in U \mid x \in [a, b],\ c \leq y \leq \varphi(x)\}$$

gilt dann

$$\int_B \operatorname{div}(f) \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}.$$

Hierbei ist per Definition

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \underbrace{-\int_a^b f_2(x,c)\,\mathrm{d}x}_{\text{unten}} + \underbrace{\int_c^{\varphi(b)} f_1(b,y)\,\mathrm{d}y}_{\text{rechts}}$$
$$\underbrace{+\int_a^b \left\langle f(x,\varphi(x)), \begin{pmatrix} -\varphi'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x}_{\text{oben}} \underbrace{-\int_c^{\varphi(a)} f_1(a,y)\,\mathrm{d}y}_{\text{links}}.$$

14.1.2 Glatt berandete Bereiche

Definition 14.3. Eine abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst ein **glatt berandeter Bereich**, falls es für jeden Punkt $p \in \partial B$ eine Permutationsmatrix P_σ für $\sigma \in S_n$ und einen offenen Quader $O = O_1 \times (c,d)$ mit $P_\sigma(p) \in O$ gibt, so dass der Durchschnitt $P_\sigma(B) \cap O$ durch eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : O_1 \to \mathbb{R}$ definiert werden kann. Genauer ist entweder

$$P_\sigma(B) \cap O = \{(x,y) \in O_1 \times (c,d) \mid c < y \leq \varphi(x)\}$$

oder

$$P_\sigma(B) \cap O = \{(x,y) \in O_1 \times (c,d) \mid \varphi(x) \leq y < d\}.$$

Lemma 14.4. *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, für die Null ein regulärer Wert ist. Dann ist die abgeschlossene Teilmenge*

$$B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid F(u) \geq 0\}$$

glatt berandet und $\partial B = \{u \in \mathbb{R}^n \mid F(u) = 0\}$.

Lemma 14.5. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine glatt berandeter, beschränkter Bereich. Dann existiert eine Länge $\eta_0 > 0$, so dass für jeden Randpunkte $p \in \partial B$ die Umgebung O zu p aus Definition* **??** *als Würfel mit Kantenlänge $2\eta_0$ um $P_\sigma(p)$ gewählt werden kann (wobei P_σ ebenfalls wie in Definition* **??** *gegeben ist).*

14.1.3 Glatt berandete Bereiche in der Ebene

Proposition 14.6. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein glatt berandeter Bereich und sei $Q \supseteq B$ ein abgeschlossenes Quadrat. Dann existiert für jede Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ von Q in Quadrate mit genügend kleiner Maschenweite eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge $\{Q_{\boldsymbol{\alpha}} \mid Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}\}$, so dass die Äquivalenzklassen aus einem oder zwei benachbarten Quadraten bestehen und so dass für die Vereinigung P über eine Äquivalenzklasse der Durchschnitt $B \cap P$ durch eine stückweise stetig differenzierbare Funktion beschrieben werden kann. Genauer formuliert gibt es für jedes $Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}$ die folgenden zwei Möglichkeiten:*

- *(Puzzlestein) Entweder $Q_{\boldsymbol{\alpha}} \sqsubset \mathfrak{Z}$ ist zu keinem weiteren Quadrat der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ äquivalent, wir nennen in diesem Fall $P = \overline{Q_{\boldsymbol{\alpha}}}$ einen* Puzzlestein.

- *(Domino) Oder $Q_{\boldsymbol{\alpha}}$ ist genau zu einem weiteren Quadrat $Q_{\boldsymbol{\beta}} \sqsubset \mathfrak{Z}$ äquivalent, so dass der Abschluss $P = \overline{Q_{\boldsymbol{\alpha}} \cup Q_{\boldsymbol{\beta}}}$ der Vereinigung ein Rechteck ist, welches wir als* Domino *bezeichnen.*

In beiden Fällen hat $\partial B \cap \partial P$ höchstens zwei Elemente und der Durchschnitt $B \cap P$ kann, möglicherweise nach Vertauschung der Koordinaten, durch den Graphen einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion φ wie in Proposition **??** *beschrieben werden.*

Definition 14.7. Eine **Parametrisierung des Randes** einer abgeschlossenen Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Kollektion von Wegen $\gamma_k : I_k \to \partial B$ auf abgeschlossenen Intervallen $I_k = [a_k, b_k]$ mit $a_k < b_k$ für $k = 1, \ldots, K$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) (Keine Selbstüberschneidungen abgesehen von den Endpunkten) Für alle $k \in \{1, \ldots, K\}$, alle $t \in I_k$ und $t' \in\ I_k^\circ$ mit $t \neq t'$ gilt $\gamma_k(t) \neq \gamma_k(t')$.

(ii) (Regularität) Die Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_K$ sind regulär.

(iii) (Überdeckend) Es gilt $\partial B = \bigsqcup_{k=1}^K \gamma_k\big([a_k, b_k)\big)$.

(iv) (Aufeinanderfolgend) Für jedes $k \in \{1, \ldots, K\}$ existiert genau ein $\ell \in \{1, \ldots, K\}$ mit $\gamma_k(b_k) = \gamma_\ell(a_\ell)$.

Die Parametrisierung $\gamma_1, \ldots, \gamma_K$ heisst **positiv orientiert**, wenn für jedes $k \in \{1, \ldots, K\}$ offene Teilmengen $U_k, V_k \subseteq \mathbb{R}^2$ und ein Diffeomorphismus $\Phi_k : V_k \to U_k$ existieren, so dass folgende Eigenschaften gelten:

(iv) (Φ_k ist orientierungserhaltend) Für alle $v \in V_k$ gilt $\det(\mathrm{D}_v \Phi_k) > 0$.

(v) (Erweiterung von γ_k) Es gilt $I_k^\circ \times \{0\} \subseteq V_k \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ sowie $\Phi_k(t, 0) = \gamma_k(t)$ für alle $t \in I_k^\circ$.

(vi) (Bereich ist links) Es gilt $U_k \cap B = \Phi_k(V_k \cap (\mathbb{R} \times [0, \infty)))$.

Definition 14.8. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, dessen Rand eine positiv orientierte Parametrisierung $\gamma_1 : I_1 = [a_1, b_1] \to \partial B, \ldots, \gamma_K : I_K = [a_K, b_K] \to \partial B$ besitzt. Weiter sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Menge $U \supseteq B$. Dann ist das **Wegintegral** von f entlang ∂B durch

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{K} \int_{a_k}^{b_k} \langle f(\gamma_k(t)), \dot{\gamma_k}(t) \rangle \, \mathrm{d}t$$

definiert. Sei $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ die Rotationsmatrix zum Winkel 90 Grad **in mathematisch positiver Richtung** (also im Gegenuhrzeigersinn). Das **Flussintegral** von f durch den Rand ∂B ist dann definiert als

$$\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial B} (Rf) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{K} \int_{a_k}^{b_k} \big\langle f(\gamma_k(t)), R^{-1} \dot{\gamma_k}(t) \big\rangle \, \mathrm{d}t.$$

Lemma 14.9. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge, die eine positiv orientierte Parametrisierung besitzt, und sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Menge $U \supseteq B$. Dann hängen sowohl das Wegintegral $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ als auch das Flussintegral $\int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}$ nicht von der Wahl der positiv orientierten Parametrisierung des Randes ∂B ab.*

14.1.4 Divergenzsatz für glatt berandete Bereiche in der Ebene

Theorem 14.10. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein glatt berandeter, kompakter Bereich und sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Menge $U \supseteq B$. Dann gilt*

$$\int_B \operatorname{div}(f) \,\mathrm{d}\operatorname{vol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n}.$$

14.1.5 Rotation und der Satz von Green

Definition 14.11. Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Die **Wirbelstärke** oder **Rotation** von f ist durch

$$\operatorname{rot}(f)(u) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial B_r(u)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \tag{14.2}$$

für $u \in U$ definiert.

Theorem 14.12. *Sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f)$ existiert auf ganz U und erfüllt*

$$\operatorname{rot}(f) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1.$$

Weiter gilt für einen glatt berandeten, kompakten Bereich $B \subseteq U$

$$\int_B \operatorname{rot}(f) \,\mathrm{d}\operatorname{vol} = \int_{\partial B} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

14.1.6 Eine Anwendung: der Jordansche Kurvensatz für glatte Kurven*

Satz 14.13. *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ein glatter, regulärer, einfacher, geschlossener Weg. Dann kann man das Komplement der Spur $\gamma([a, b])$ schreiben als*

$$\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a, b]) = \operatorname{Inn}(\gamma) \sqcup \operatorname{Auss}(\gamma),$$

wobei das Innere $\operatorname{Inn}(\gamma)$ eine offene, beschränkte, zusammenhängende Teilmenge und das Äussere $\operatorname{Auss}(\gamma)$ eine offene, unbeschränkte, zusammenhängende Teilmenge ist. Des Weiteren gilt $\partial \operatorname{Inn}(\gamma) = \partial \operatorname{Auss}(\gamma) = \gamma([a, b])$.

14.2 Oberflächenintegrale

14.2.1 Flussintegrale entlang Oberflächen

Lemma 14.14. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein glatt berandeter Bereich. Dann existiert eine orientierte Parametrisierung $\Phi_1, \ldots, \Phi_L$ des Randes $S = \partial B$, so dass $\partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell$ eine Aussennormale ist. Das heisst, für alle $\ell \in \{1, \ldots, L\}$ und $(s,t) \in V_\ell$ gilt*

$$\begin{aligned}\Phi_\ell(s,t) + \varepsilon(\partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell)(s,t) &\notin B \\ \Phi_\ell(s,t) - \varepsilon(\partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell)(s,t) &\in B,\end{aligned}$$

wenn nur $\varepsilon > 0$ genügend klein ist.

Definition 14.15. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche, sei $\Phi_1 : V_1 \to U_1, \ldots, \Phi_L : V_L \to U_L$ eine orientierte Parametrisierung von S und seien $K_1 \subseteq V_1 \cap \mathbb{R}^2, \ldots, K_L \subseteq V_L \cap \mathbb{R}^2$ Karten für diese Parametrisierung. Sei $U \supseteq S$ eine offene Menge und sei f ein stetiges Vektorfeld auf U. Dann definieren wir das Flussintegral von f über S durch

$$\int_S f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \sum_{\ell=1}^{L} \int_{K_\ell} \langle f \circ \Phi_\ell, \partial_s \Phi_\ell \times \partial_t \Phi_\ell \rangle \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t.$$

Lemma 14.16. *Das Flussintegral über eine orientierbare, zusammenhängende Fläche hängt, abgesehen vom Vorzeichen, nicht von der gewählten orientierten Parametrisierung ab.*

14.3 Der Divergenzsatz im dreidimensionalen Raum

Definition 14.17. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die **Divergenz** von f bei $p \in U$ ist definiert als

$$\operatorname{div}(f)(p) = \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{8h^3} \int_{\partial B_h^\infty(p)} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{n},$$

falls der Grenzwert existiert.

14.3.1 Der Divergenzsatz für Bereiche unter Graphen

Proposition 14.18. *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Rechteck und sei $\varphi : Q \to [z_0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Des Weiteren sei*

$$B = \left\{ (x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in Q,\ z_0 \leq z \leq \varphi(x,y) \right\}$$

der abgeschlossene Bereich unter dem Graphen von φ und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Obermenge U von B. Dann existiert die Divergenz $\operatorname{div}(f)$ *auf ganz U, ist durch*

$$\operatorname{div}(f) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3$$

gegeben und erfüllt

$$\int_B \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \int_{\partial B} f \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{n}.$$

VO 18. Mai

14.3.2 Der Divergenzsatz auf glatt berandeten Bereichen

Theorem 14.19. *Sei B ein kompakter, glatt berandeter Bereich und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld definiert auf einer offenen Obermenge von B. Dann gilt*

$$\int_B \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \int_{\partial B} f \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{n}.$$

14.4 Der Laplace-Operator*

Definition 14.20. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann definieren wir für $p \in U$

$$\Delta f(p) = \lim_{r \searrow 0} \tfrac{c_n}{r^{n+2}} \int_{B_r(p)} \big(f(p+h) - f(p)\big)\,\mathrm{d}h$$

für eine noch zu fixierende Konstante $c_n > 0$, falls der Grenzwert existiert.

Proposition 14.21. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Wir setzen $c_n = \frac{2(n+2)}{\operatorname{vol}(B_1(0))}$. Dann existiert ΔF auf ganz U und erfüllt*

$$\Delta F = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 F.$$

14.4.1 Harmonische Funktionen

Korollar 14.22. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ für $n = 2$ oder $n = 3$ offen und $g : U \to \mathbb{R}$ harmonisch (das heisst, $\Delta g = 0$). Dann gilt für jeden abgeschlossenen Ball $\overline{B_r(p)} \subseteq U$ die Mittelwerteigenschaft*

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(\partial B_r(p))} \int_{\partial B_r(p)} g(h)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}(h) = g(p).$$

14.5 Der Satz von Stokes im dreidimensionalen Raum

14.5.1 Die Wirbelstärke in einem infinitesimalen Parallelogramm

Definition 14.23. Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Für $p \in U$ und $u, v \in \mathbb{R}^3$ definieren wir die **Wirbelstärke** von f **in dem infinitesimalen Parallelogramm** zu $u, v \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\operatorname{rot}(f, p, u, v) = \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h^2} \int_{\partial P(p, hu, hv)} f \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{s},$$

falls der Grenzwert existiert.

Proposition 14.24. *Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und sei $p \in U$. Dann gelten folgende Aussagen:*

- *Für alle $p \in U$ und $u, v \in \mathbb{R}^3$ existiert die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f, p, u, v)$.*
- *Die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f, p, u, v)$ hängt bei festem $p \in U$ und $v \in \mathbb{R}^3$ linear von u ab.*
- *Die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f, p, u, v)$ hängt bei festem $p \in U$ und $u \in \mathbb{R}^3$ linear von v ab.*
- *Es gilt $\operatorname{rot}(f, p, u, v) = -\operatorname{rot}(f, p, v, u)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $p \in U$.*

14.5.2 Der Satz von Stokes

Theorem 14.25. *Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann existiert die Wirbelstärke $\operatorname{rot}(f, p, u, v)$ von f zu jedem Punkt $p \in U$ und zu allen $u, v \in \mathbb{R}^3$ und ist durch*

$$\operatorname{rot}(f, p, u, v) = \langle \operatorname{rot}(f)(p), u \times v \rangle$$

gegeben, wobei das Vektorfeld

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

*die **Rotation** von f genannt wird. Ist $S \subseteq U$ eine glatt berandete, orientierbare Fläche, so gilt des Weiteren*

$$\int_S \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_{\partial S} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

14.6 Zwei Werkzeuge der weiteren Analysis*

14.6.1 Glättung durch Faltung

Proposition 14.26. *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte (oder auch nur C^k für $k \in \mathbb{N}_0$) Funktion mit kompaktem Träger. Dann definiert*

$$\psi * F(p) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(p - v) F(v) \,\mathrm{d}\operatorname{vol}(v)$$

für $p \in U$ eine glatte (oder C^k) Funktion mit Träger in $\operatorname{supp}(\psi) + \operatorname{supp}(F)$.

Proposition 14.27. *Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ so dass für $p \in K$ und $q \in \mathbb{R}^n$ mit $\|q - p\| < \delta$ die Abschätzung $|F(q) - F(p)| < \epsilon$ gilt. Falls $\psi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ Träger $\operatorname{supp} \psi \subseteq B_\delta(0)$ hat und $\int_{B_\delta(0)} \psi \,\mathrm{d}\operatorname{vol} = 1$ gilt, dann gilt*

$$\|\psi * F - F\|_{K,\infty} = \max_{p \in K} \|\psi * F(p) - F(p)\| \leq \epsilon.$$

Des Weiteren existieren für jedes $\delta > 0$ derartige glatte Funktionen ψ.

Korollar 14.28. *Für jede stetige Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompakten Träger und jedes $\epsilon > 0$ existiert eine glatte Funktion $F_{\mathrm{glatt}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompakten Träger und $\|F - F_{\mathrm{glatt}}\|_\infty < \epsilon$.*

14.6.2 Glatte Partitionen der Eins

Satz 14.29. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $O_1, \ldots, O_L$ eine offene Überdeckung von K. Dann existieren glatte Funktionen*

$$\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_L : \mathbb{R}^n \to [0, 1],$$

so dass

- $\mathrm{supp}(\psi_0) \cap K = \emptyset$.
- $\mathrm{supp}(\psi_\ell) \subseteq O_\ell$ *für* $\ell \in \{1, \ldots, L\}$
- $\sum_{\ell=0}^{L} \psi_\ell = 1$.

14.7 Konservative Vektorfelder*

14.7.1 Homotopie

Definition 14.30. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also eine zusammenhängende, offene Teilmenge) und seien γ_0, γ_1 zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und gleichem Endpunkt $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Dann heissen γ_0 und γ_1 **homotop**, falls es eine stetige Abbildung $H : [0, 1]^2 \to U$ gibt, die wir eine **Homotopie** nennen und folgende Eigenschaften erfüllt:

- $H(0, t) = \gamma_0(t)$ für alle $t \in [0, 1]$.
- $H(1, t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0, 1]$.
- $H(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ für alle $s \in [0, 1]$.
- $H(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ für alle $s \in [0, 1]$.

Falls γ_0 und γ_1 glatte Wege sind und die Homotopie glatt gewählt werden kann, so nennen wir die Wege **auf glatte Weise homotop**.

14.7.2 Integrabilität auf einfach zusammenhängenden Gebieten

Definition 14.31. Ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **einfach zusammenhängend**, falls je zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop sind.

Satz 14.32. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Unter dieser Annahme ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ, wenn f den Integrabilitätsbedingungen*

$$\partial_k f_j = \partial_j f_k \tag{14.3}$$

für alle $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ *genügt.*

14.7.3 Invarianz unter Homotopien

Lemma 14.33. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld welches die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Sei weiters* γ_0, γ_1 *zwei glatte Wege von* $p_0 \in U$ *nach* $p \in U$*, die auf glatte Weise in* U *homotop sind. Dann gilt* $\int_{\gamma_0} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$.

Lemma 14.34. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld welches die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Des Weiteren seien* γ_0, γ_1 *zwei glatte Wege von* $p_0 \in U$ *nach* $p \in U$*, die in* U *homotop sind. Dann gilt* $\int_{\gamma_0} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$.

14.8 Integrale über Teilmannigfaltigkeiten und das alternierende Tensorprodukt*

14.8.1 Das alternierende Tensorprodukt

Proposition 14.35. *Das alternierende Tensorprodukt* $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ *besitzt folgende* ***universelle Eigenschaft****. Falls*

$$A : (\mathbb{R}^n)^k \to W$$

eine multilineare, alternierende Abbildung mit Werten in einem $\mathbb{R}$*-Vektorraum* W *ist, so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung* $L : \bigwedge^k \mathbb{R}^n \to W$ *mit*

$$A(v_1, \ldots, v_k) = L(v_1, \ldots, v_k) \tag{14.4}$$

für alle $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 14.36. *Für* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\|v_1 \wedge \cdots \wedge v_k\| = \sqrt{\operatorname{gram}(v_1, \ldots, v_k)} = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,k}}.$$

In Worten ausgedrückt können wir die Länge des alternierenden Tensors $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ *als das Volumen des von* $v_1, \ldots, v_k$ *aufgespannten Parallelotops auffassen.*