ETHZ, D-MATH

Probeprüfung

Numerische Methoden D-PHYS, FS 2016

Dr. V. Gradinaru

08.04.2016

Prüfungsdauer: 90 Minuten

Maximal erreichbare Punktzahl: 21

1 (11 Punkte) Integration auf dem Torus

Sei $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$ der dreidimensionale Torus, der entsteht, wenn man einen Kreis mit Radius r_0 mit Abstand $R_0 > r_0$ um die z-Achse rotieren lässt. Der innere bzw. der äussere Radius beträgt also $R_0 - r_0$ bzw. $R_0 + r_0$. Wir betrachten die Funktion:

$$f(x,y,z) := \begin{cases} 1 + \cos\left(\pi \frac{r^2}{r_0^2}\right), & r < r_0 \\ 0, & r \geq r_0\,, \end{cases}$$

wobei $r := \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2} - R_0)^2 + z^2}$.

(i) (3 punkte) Berechnen Sie das Integral $\int_{\mathcal{T}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ analytisch.

Hinweis: $\mathcal{T} = \underline{T}([0, r_0] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{T}(r, \phi, t) = \begin{pmatrix} (R_0 + r\cos\phi)\cos t \\ (R_0 + r\cos\phi)\sin t \\ r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

(ii) (5 punkte) Implementieren Sie eine `Python`-Funktion `mcquad(k)`, die das Integral und $\tilde{\sigma}_N$ numerisch mit der Monte-Carlo-Methode mit $N = 10^k$ Zufallszahlen berechnet. Nehmen Sie $R_0 = 0.6$, $r_0 = 0.3$.

(iii) (1 punkt) Verwenden Sie `mcquad(k)` mit `k` $= 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und berechnen Sie den absoluten und relativen Fehler der Approximationen.

(iv) (2 punkte) Bestimmen Sie das Konfidenzintervall für $M = 100$ experimenten mit 10^3 Zufallszahlen.

Bitte wenden!

2 (10 Punkte) Gebremste Präzession einer Magnetnadel

Die Präzession einer Magnetnadel in Gegenwart von Reibung wird vom Anfangswertproblem für die Position der Nadelspitze $\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^3$ beschrieben:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{y}} &= \underline{f}\left(\underline{y}\right) := \underline{a} \times \underline{y} + c\,\underline{y} \times \left(\underline{a} \times \underline{y}\right)\\ \underline{y}(0) &= \frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

mit $c > 0$ und $\underline{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Das andere Ende sei im Ursprung fixiert.

(i) (1 punkt) Zeigen Sie, dass die euklidische Norm der Lösung $\underline{y}(t)$ erhalten bleibt.

Hinweis: Es gilt $(\underline{x} \times \underline{y}) \perp \underline{x},\ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$.

(ii) (1 punkt) Schreiben Sie die Definition der impliziten Mittelpunktsregel für eine autonome Differentialgleichung hin und formulieren Sie dann dieses Verfahren für das gegebene Anfangswertproblem.

(iii) (1 punkt) Implementieren Sie die implizite Mittelpunktsregel (benutzen Sie `fsolve`).

(iv) (3 punkte) Die *linear-implizite Mittelpunktsregel* kann durch Linearisierung der impliziten Mittelpunktsregel um den aktuellen Lösungswert $\underline{y}_t$ erhalten werden. Leiten Sie die definierende Gleichung der linear-impliziten Mittelpunktsregel für eine allgemeine autonome Differentialgleichung $\dot{\underline{y}}(t) = \underline{g}(\underline{y})$ mit glattem $\underline{g} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ her.

Hinweis: In der Taylor-Entwicklung ist die erste Ableitung die Jacobi Matrix $\mathbf{J_g}$, so dass der Linearisierung von g ist

$$\underline{g}(\underline{x}) \simeq \underline{g}(\underline{a}) + \mathbf{J_g}(\underline{a})(\underline{x} - \underline{a}).$$

(v) (2 punkte) Implementieren Sie die linear-implizite Mittelpunktsregel. Die rechte Seite $\underline{f}$ und Jacobi Matrix $\mathbf{J_f}$ sind im Template gegeben.

Hinweis: Zur Lösung einer Lineargleichung `solve` verwenden.

(vi) (1 punkt) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Parameter $\underline{a} = [1,0,0]^{\mathrm{T}}$ und $c = 1$ mit beiden Verfahren. Plotten Sie jeweils die drei Komponenten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ gegen die Zeit.

(vii) (1 punkt) Plotten Sie die euklidische Norm beider numerischen Lösungen. Bleiben die Normen erhalten?