D-MATH
Dr. Vasile Gradinaru
Luc Grosheintz

Numerische Methoden

FS 2017

Serie 5

Best Before: Di./ Mi. 28.3/29.3, in den Übungsgruppen oder im J 68
Koordinatoren: Luc Grosheintz, `luc.grosheintz@sam.ethz.ch`
Webpage: http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-1662-10L

1. *Gauss-Legendre Quadratur und Golub-Welsch Algorithmus*

a) Leiten Sie die Drei-Term-Rekursion her, welche die Legendre Polynome $P_n(x)$ beschreibt. Das Skalarprodukt ist in diesem Fall gegeben als:

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$$

und es gilt $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$.

b) Begründen Sie die Wahl der Einträge in der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}$ im Algorithmus von Golub-Welsch. (Siehe Code 7.3.3 im Skript.)

c) Verwenden Sie folgende Quadraturregeln

- *(bereits erledigt in Serie 4)* zusammengesetzte Trapezregel
- *(bereits erledigt in Serie 4)* zusammengesetzte Simpsonregel
- Gauss-Legendre Quadratur
- zusammengesetzte Gauss-Legendre Quadratur

um das Integral

$$I = \int_{0}^{1} f_i(x)\mathrm{d}x$$

von $f_i(x)$ auf N Teilintervallen oder mit n Funktionsauswertungen zu berechnen. (Die genauen Werte von N und n stehen im Template.) Die beiden Funktionen sind gebeben durch

$$f_1(x) := \frac{1}{1+5x^2} \qquad f_2(x) := \sqrt{x}\,.$$

Berechnen Sie den Fehler und plotten Sie die Konvergenzraten. Welche Methode verwendet man sinnvollerweise?

Hinweis: Verwenden Sie das Template `quadrature.py`.

Bitte wenden!

2. Kernaufgabe: Die Airy-Gleichung

Aufgabenstellung

Es soll die so genannte Airy Gleichung

$$\ddot{u}(t) - t\,u(t) = 0$$

numerisch gelöst werden wobei folgende Anfangswerte zum Zeitpunkt $T_{start} = 0$ gegeben sind

$$u(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})} \approx 0.3550280539$$
$$\dot{u}(0) = -\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})} \approx -0.2588194038$$

und rückwärts in der Zeit integriert wird bis zu $T_{end} = -40$. Dieses Anfangswertproblem definiert die Airy-Funktion $\mathrm{Ai}(t)$ welche in der Physik eine grosse Bedeutung hat.

1. Schreiben Sie die Gleichung um in ein System erster Ordnung für $y(t)$ und leiten Sie daraus die rechte Seite her. Implementieren Sie die rechte Seite in der Funktion `rhs` welche t und $y(t)$ als Argumente hat.

   Hinweis: Verwenden Sie das Template `airy.py`

2. Implementieren Sie das explizite und das implizite Eulerverfahren, die explizite und die implizite Mittelpunktsregel. Die Argumente dieser Funktionen sind: der Anfangswert $y(0)$, Anfangszeit T_{start}, Endzeit T_{end} und die Anzahl Schritte N. Lösen Sie das Anfangswertproblem und plotten Sie die Lösung.

   Hinweis: Benutzen Sie die Funktion `fsolve` aus `scipy.optimize`.

3. Implementieren Sie die 4 entsprechenden Runge-Kutta Methoden mit allgemeinem Butcher Schema in der Funktion `RK`. Bekommen Sie dieselbe Ergebnisse wie beim Punkt 2?

4. Lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem mit einer Runge-Kutta 3/8 Zeitintegration. Implementieren Sie dafür die Funktion `RK_38` und plotten Sie die Lösung.

   Hinweis: Das Butcher Schema der Runge-Kutta 3/8 Regel lautet

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

   Das 3/8 Butcher Schema in dem Programm ist repräsentiert wie eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$