D-MATH Numerische Methoden FS 2017
Dr. Vasile Gradinaru
Luc Grosheintz

Serie 9

Abgabedatum: 16.5/17.5, in den Übungsgruppen
Koordinatoren: Luc Grosheintz, HG G 46, `luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch`
Webpage: `http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-1662-10L`

1. *Polynomfit und die Runge Funktion*

Die Runge Funktion ist definiert als:

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{1}$$

Wir wollen diese Funktion auf dem Interval $[-5, 5]$ mit einem Polynom $P_n(x)$ von Grad n approximieren. Dazu schreiben wir ein lineares Ausgleichsproblem mit m gleichmässig in $[-5, 5]$ verteilten Punkten $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{m}$ wie folgt:

$$\mathbf{A}\underline{c} = \underline{b} \tag{2}$$

wobei $\underline{c}$ die $n+1$ Koeffizienten des Polynoms P_n sind.

a) Finden Sie die Matrix $\mathbf{A}$ und die rechte Seite $\underline{b}$.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem für Polynome mit Grad $2 \leq n \leq 14$ und jeweils $m = 20$ und $m = 40$.

2. *Global Positioning System*

Global Positioning System ist ein globales Navigationssatellitensystem zur Positionsbestimmung und Zeitmessung. GPS basiert auf Satelliten, die mit codierten Radiosignalen ständig ihre aktuelle Position und die genaue Uhrzeit ausstrahlen. Aus den Signallaufzeiten können GPS-Empfänger dann ihre eigene Position und Geschwindigkeit berechnen. Theoretisch reichen dazu die Signale von drei Satelliten aus, welche sich oberhalb ihres Abschaltwinkels befinden müssen, da daraus die genaue Position und Höhe bestimmt werden kann. In der Praxis haben aber GPS-Empfänger keine Uhr, die genau genug ist, um die Laufzeiten korrekt zu messen. Deshalb wird das Signal eines vierten Satelliten benötigt, mit dem dann auch die genaue Zeit im Empfänger bestimmt werden kann. [1]

Das Signal des Satelliten i enthält seine Zeit und Position:

$$[t_{s,i},\ x_{s,i},\ y_{s,i},\ z_{s,i}]$$

Wir können N Satelliten empfangen und speichern die Messwerte zeilenweise in $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N\times 4}$. Die Zeit des Empfängers t_r ist im Vergleich zur Signallaufzeit nur unzureichend bekannt und muss ebenso wie die Position bestimmt werden, d.h. wir suchen:

$$\underline{x} := [t_r,\ x_r,\ y_r,\ z_r].$$

Dazu minimieren wir die Residuen r_i, $i = 1 \dots N$ gegeben durch folgende Gleichung:

$$\boxed{r_i := -c^2(t_r - t_{s,i})^2 + (x_r - x_{s,i})^2 + (y_r - y_{s,i})^2 + (z_r - z_{s,i})^2}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum darstellt.

a) Implementieren Sie den Residuenvektor $F(\underline{x}, \mathbf{X}) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{N\times 4} \to \mathbb{R}^N$.

b) Implementieren Sie die Jacobi-Matrix $J(\underline{x}, \mathbf{X}) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{N\times 4} \to \mathbb{R}^{N\times 4}$.

c) Lösen Sie das nichtlineare Ausgleichsproblem mit dem Gauss-Newton Verfahren.

d) Die Genauigkeit der Positionsbestimmung hängt vom Messfehler in der Signallaufzeit, der Anzahl sichtbarer Satelliten und ihrer Verteilung ab. Die Funktion `random_sampling` im Code Template simuliert den Ausfall von Satelliten, was auftritt wenn Satelliten in einer gewissen Himmelsrichtung von einem Hindernis verdeckt werden.

Kommentieren Sie die Beobachtungen für die mit `random_sampling` erstellten Plots mit verschiedenen Toleranzen in der Zeitmessung $\varepsilon_t = 10^{-10}, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6}$.

[1] Aus Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/GPS

Siehe nächstes Blatt!

3. *Vibration einer Saite*

Die Vibration einer Saite, die an beiden Enden fixiert ist und unter gleichmässiger Spannung T steht, wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{m(x)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \tag{3}$$

wobei $m(x)$ die Masse ist. Die Methode der Separation der Variablen liefert:

$$\frac{T}{m(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \omega^2 \psi(x) = 0\,, \tag{4}$$

wobei ω durch die Randbedingungen gegeben ist. Für die Approximation der Ableitungen wollen wir finite Differenzen verwenden. Wir unterteilen das Intervall in $N = 513$ Stücke der Länge h indem wir $N+1$ Punkte gleichmässig verteilen:

$$0 = x_0 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = L \tag{5}$$

Dann approximieren wir die exakte Lösung in diesen Punkten mit $\psi_i \approx \psi(x_i)$.

Die Saite sei an den beiden Endpunkten $x = 0$ und $x = L$ fest eingespannt. Die Spannung T und die Masse $m(x)$ sind hier fix auf 1 gesetzt.

a) Stellen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ *effizient* auf und lösen Sie das Eigenwertproblem:

$$\mathbf{A}\underline{\nu_n} = \lambda_n \underline{\nu_n} \tag{6}$$

per `eigh` aus `scipy.linalg`. Berechnen Sie sowohl die Eigenwerte λ_n als auch die Eigenvektoren $\underline{\nu_n}$.

b) Warum verwenden wir besser `eigh` als `eig`? Beide Funktionen sind in `scipy.linalg` zu finden. Welche Funktionen aus diesem Modul könnten hier auch noch nützlich sein?

c) Stellen Sie $\mathbf{A}$ *effizient* als dünnbesetzte Matrix auf.

Hinweis: Nutzen Sie dazu die Funktion `diags` aus `scipy.sparse`.

d) Berechnen Sie die 50 kleinsten Eigenwerte λ_n sowie die dazugehörigen Eigenvektoren $\underline{\nu_n}$ von $\mathbf{A}$. Benutzen Sie dafür die Funktion `eigsh` aus `scipy.sparse.linalg`

e) Plotten Sie die ersten 10 Eigenschwingungen $\psi_n(x)$.

f) Plotten Sie die Energien E_n der ersten 20 Eigenschwingungen gegen n.

g) Wiederholen Sie die Aufgabe (ohne den Teil für dünnbesetzte Matrizen) für eine inhomogene Massenverteilung:

$$m(x) := \frac{1}{2}\left(m_1(L-x) + m_2 x\right) \tag{7}$$

mit $m_1 = 1 - \delta m$, $m_2 = 1 + \delta m$ und $\delta m = 0.99$. Welche Routinen zur Berechnung der Eigenwerte dürfen wir in diesem Fall verwenden?