D-MATH
Dr. Vasile Gradinaru
Luc Grosheintz

Serie 11

Abgabedatum: 30.5/31.5, in den Übungsgruppen
Koordinatoren: Luc Grosheintz, HG G 46, `luc.grosheintz@sam.math.ethz.ch`
Webpage: http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-1662-10L

1. *Simples Splittingverfahren*

Die folgende ODE beschreibt die Drehung und gleichzeitiges Schrumpfen eines Vektors in $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{d}{dt}\underline{y} = \frac{dR}{dt} \cdot R^{-1} \cdot \underline{y} + b\,\underline{y} \tag{1}$$

mit $b = -0.1$ und der Rotationsmatrix

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta t & -\sin\theta t \\ \sin\theta t & \cos\theta t. \end{pmatrix} \tag{2}$$

a) Identifizieren Sie die Rotations- und Streckungsterme in der ODE. Splitten Sie die ODE in die zwei Terme.

b) Lösen Sie die beiden ODEs welche Sie durch das Splitting erhalten haben analytisch.

Hinweis: Die beiden Terme haben eine klare geometrische Bedeutung. Nutzen Sie dies aus um analytische Lösungen zu finden.

c) Implementieren Sie das Strang-Splittingverfahren und integrieren Sie die ODE mit dem Startwert $\underline{y} = (1, 0)$ bis $t = 100$.

Hinweis: Implementieren Sie autonome Lösungsoperatoren.

2. *Teilchen im Gravitationsfeld einer Punktmasse*

Bewegungsgleichungen können oft als Hamiltonisches System

$$\dot{\underline{q}} = \nabla_{\underline{p}} \cdot H(\underline{p}, \underline{q}) \tag{3}$$
$$\dot{\underline{p}} = -\nabla_{\underline{q}} \cdot H(\underline{p}, \underline{q}) \tag{4}$$

geschrieben werden. Für ein Teilchen im Gravitationsfeld der Sonne gilt

$$H = 1/2m \, \|\underline{p}\|^2 + U(\underline{q})$$

wobei

$$U(\underline{q}) = U(q) = -\frac{G\,M}{q}.$$

Wir setzen $G = M = m = 1$.

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen eines Teilchens in im Gravitationsfeld einer Punktmasse her. Verwenden Sie die Newtonschen Gesetze. Vergewissern Sie sich, dass (3) mit der von Ihnen hergeleiteten ODE übereinstimmt.

b) Spalten Sie den Hamiltonian in zwei Teile $T(\underline{p})$ und $V(\underline{q})$. Welchen physikalischen Grössen ensprechen T und V?

c) Schreiben Sie die beiden ODEs welche durch das Splitting entstehen auf und lösen Sie beide analytisch.

d) Implementieren Sie Strang-Splitting oder eines der vielen Splittingverfahren aus Code 8.4.9 im Skript, die Parameter finden Sie auch in `splitting_parameters.py`.

e) Integrieren Sie (3) mit Startwert $p(0) = (0, 1)$, $q(0) = (1, 0)$ bis zur Zeit $t = 50$.

Plotten Sie q_2-q_1, p-q sowie $H - t$, $T - t$ und $V - t$. Die letztem drei Grössen plotten Sie am besten in einem Plot.

- Versuchen Sie andere Startwerte.
- Untersuchen Sie das Langzeitverhalten.
- Probieren Sie auch ganz kleine Schrittweiten aus.

Siehe nächstes Blatt!

3. *Pendel mit Reibung und externer Kraft*

Wir betrachten das mathematische Pendel, welches durch folgende Gleichung ($l = g = 1$) beschrieben ist:

$$\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = F(t) \tag{5}$$

mit externer Kraft:

$$F(t) = A\sin(\omega t) \tag{6}$$

mit Frequenz $\omega = 1.3$, Amplitude $A = 1$ und Reibung $\mu = 0$ bzw. $\mu = 0.1$. Verwenden Sie die Anfangswerte $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$.

a) Lösen Sie (5) mit Runge-Kutta aus `ode45`.

b) Lösen Sie (5) mit den Splitting-Verfahren `SS`, `PRKS6`, `Y61`, `KL8`.

Hinweis: Sie finden die Parameter der verschiedenen Splittingverfahren in `splitting_parameters.py`.

c) Plotten Sie die Auslenkung $\varphi(t)$ und die Trajektorien im Phasenraum $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$.

4. *Design einer Rutsche*

Sei $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ein Architekt möchte eine Rutsche entwickeln, die so nah wie möglich am Graph der Funktion:

$$g(x) = \frac{1}{2} f(5x) + f(5x+5) \quad \text{mit} \quad x \in [-1, 1]$$

liegt. Dafür benutzt er ein Computerprogramm, das polynomiale Interpolation zur Darstellung von Funktionen verwendet.

a) Er nimmt $N+1$ äquidistante Punkte in $[-1, 1]$, und verwendet sein Interpolationsprogramm mit einem Polynom vom Grad N. Probieren Sie diese Methode mit $N = 21$. Plotten Sie $g(x)$ und das Interpolationspolynom $p_N(x)$ an 10^3 Punkten `a = linspace(-1,1,1000)`. Kann das so entstandene Kunstobjekt zum Rutschen verwendet werden? Liefern grössere N bessere Ergebnisse?

b) Welches ist die optimale Wahl der Interpolationspunkte für ein allgemeines N? Werten Sie g und diese Interpolation mit 21 Interpolationsknoten in `a` aus. Plotten Sie beide gegen `a`. Berechnen und notieren Sie den maximalen absoluten Fehler.

c) Bestimmen Sie numerisch die minimale Anzahl Interpolationspunkte, so dass der maximale Fehler in `a` kleiner als 10^{-3} ist.

d) Verwenden Sie eine geeignete Substitution und die Trapezregel, um

$$I(g) = \int_{-1}^{1} g(x)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

numerisch zu approximieren. Plotten Sie den absoluten Fehler für $M \in [11, 21, \ldots, 151]$ Funktionsauswertungen. Warum kann man die Trapezregel nicht direkt (ohne Variablenwechsel) auf $I(g)$ anwenden? Plotten Sie auch den Fehler, der sich durch die direkte Anwendung der Mittelpunktsregel ergibt. Der exakte Wert dieses Integrals ist $I = 0.6721696847788537$.

e) Sei p_N das Interpolationspolynom. Berechnen Sie $I(p_N)$ so effizient wie Ihnen möglich ohne die Trapezregel zu verwenden und plotten Sie den absoluten Fehler $|I - I(p_N)|$ für $N \in [10, 20, \ldots, 100]$.