10.1.

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht Lebesgue-massbare Menge. A ist überabzählbar, sonst $\lambda(A) = 0$. Sei $\Lambda := A$ und $f_\lambda := I_{\{\lambda\}}(x)$. Somit $\sup\limits_{\lambda} f_\lambda = I_A$.

Aber, $I_A^{-1}(1) = A$ ist nicht Lebesgue-massbare, und dann I_A nicht eine messbare Funktion ist.

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$, ν das Zählmass, und $\mu(\{n\}) = \dfrac{1}{n^2}$. Dann ist $\mu(A) = 0$ äquivalent mit $A = \emptyset$, und dann ist klar, dass $\nu \ll \mu$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest und $\delta > 0$ belibig. Weil $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6} < \infty$, existiert N mit $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < \delta$. Sei $A = \{N, N+1, \dots\}$. Somit ist

$$\mu(A) < \delta,$$

aber

$$\nu(A) = \infty.$$

10.2. Wir definieren die Abbildung γ als

$$\mathcal{A}_0 \ni A \mapsto \gamma(A) := \int_A f \, d\mu \, .$$

Weil nach Voraussetzung f in $\mathcal{L}^1(\mu)$ und $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ ist, folgt, dass γ ein signiertes Mass auf $\mathcal{A}_0$ ist. Ferner gilt

$$\gamma \ll \mu\Big|_{\mathcal{A}_0} =: \nu,$$

und weil μ endlich ist, folgt, dass auch ν endlich ist.

Nach dem Satz von Radon-Nikodým, angewandt auf $(\Omega, \mathcal{A}_0, \nu)$ für γ, erhalten wir ein $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}_0$

$$\int_A f \, d\mu = \gamma(A) = \int_A g \, d\nu = \int_A g \, d\mu$$

gilt.

10.3.

(a) Wegen $\nu \ll \mu$ ist $\lambda \ll \mu$, und offenbar gilt $\nu \ll \lambda$. Nach dem Satz von Radon-Nikodým existieren $g = \frac{d\nu}{d\mu}$, $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$ und $h = \frac{d\lambda}{d\mu}$, und $f, g, h \in \overline{\mathcal{L}}^0_+$.

Sei $E \in \mathcal{A}$. Wir haben $\nu(E) = \int fI_E d\lambda$ und es existieren $f_n \in \mathcal{E}_+$, so dass $f_n \nearrow f$. Somit

$$\int f_n I_E d\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i \cap E)a_i.$$

Ausserdem ist

$$\lambda(A_i \cap E) = \int hI_{A_i \cap E} d\mu$$

und dann

$$\int f_n I_E d\lambda = \sum_{i=1}^n a_i \int hI_{A_i \cap E} d\mu = \int \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i \cap E} h d\mu.$$

Mit Satz 2.9 haben wir $\int f_n I_E d\lambda \to \int fhI_E d\mu$, und $\int f_n I_E d\lambda \to \int fI_E d\lambda$. Wir schliessen dass

$$\int fI_E d\lambda = \int fhI_E d\mu = \nu(E) = \int gI_E d\mu.$$

Mit Satz 6.2, $g = fh$ μ-f.ü.

(b) Sei $E_n = \left\{x \in \Omega \colon f(x) < -\frac{1}{n}\right\}$. Wir haben

$$-\frac{1}{n}\lambda(E_n) = \int_{E_n} -\frac{1}{n} d\lambda \geq \int_{E_n} f d\lambda = \nu(E_n) \geq 0.$$

Damit ist $\lambda(E_n) = 0$, und auch $\mu(E_n) = 0$. Also ist $\mu(\bigcup E_n) \leq \sum \mu(E_n) = 0$, somit $\mu(\bigcup E_n) = 0$, und das impliziert $f \geq 0$ μ-f.ü.

Sei $F = \{x \in \Omega \colon f(x) \geq 1\}$. ν ist σ-endlich, und damit existieren Mengen $F_n \subseteq F$, $\bigcup F_n \supseteq F$ und $\nu(F_n) < \infty$. Aber

$$\nu(F_n) = \int_{F_n} f d\lambda \geq \int_{F_n} 1 d\lambda = \lambda(F_n) = \mu(F_n) + \nu(F_n).$$

Also haben wir $\mu(F_n) = 0$, und damit $\mu(F) = 0$. Somit ist $f < 1$ μ-f.ü.

(c) Wir wissen aus **(b)**, dass $f, 1 - f \in \overline{\mathcal{L}}^0_+$. ν ist σ-endlich, und dann existieren Mengen $\{\Omega_k\}$, so dass $\Omega = \biguplus_{k=1}^\infty \Omega_k$ und $\nu(\Omega_k) < \infty$.

Sei $E \in \mathcal{A}$, dann wir haben $E = \biguplus_{k=1}^\infty E_k$, wobei $E_k = E \cap \Omega_k$ und $\nu(E_k) < \infty$.

$$\int_{E_k} (1 - f) d\lambda + \nu(E_k) = \int_{E_k} 1 d\lambda = \lambda(E_k) = \mu(E_k) + \nu(E_k).$$

Und dann

$$\int_{E_k} (1-f) d\lambda = \mu(E_k).$$

Wegen μ σ-endlich ist,

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} (1-f) d\lambda = \int_E (1-f) d\lambda.$$

Damit $\dfrac{d\mu}{d\lambda} = (1-f)$. Ausserdem $\mu(E) = \int I_E d\mu$ für alle $E \in \mathcal{A}$. Somit $\dfrac{d\mu}{d\mu} = 1$, $\mu \ll \mu$, $\lambda \ll \mu$. Wegen $\lambda = \mu + \nu$ ist, dann $\mu \ll \lambda$. In **(a)**, sei $\nu := \mu$. Wir haben

$$1 = \frac{d\mu}{d\mu} = \frac{d\mu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} = (1-f)\frac{d\lambda}{d\mu}.$$

Somit

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{1-f}.$$

Mit **(a)**,

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{f}{1-f}.$$

10.4. Wir müssen überprüfen, dass $\|\cdot\|_v$ die Eigenschaften einer Norm erfüllt, d.h. Definitheit, absolute Homogenität und die Dreiecksungleichung.

Offenbar ist $\|0\|_v$=0, und falls umgekehrt $\|\nu\|_v = \nu^+(\Omega) + \nu^-(\Omega) = 0$ ist, dann gilt $\nu^+(\Omega) = 0 = \nu^-(\Omega)$ und deshalb ist $\nu = 0$.

Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\nu \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$, und betrachten Sie die Ladungsverteilung $\alpha\nu$. Da die Hahn-Zerlegung eindeutig ist, folgt sofort, dass

$$(\alpha\nu)^+ = \alpha\nu^+\,, \quad (\alpha\nu)^- = \alpha\nu^- \quad \text{für } \alpha \geq 0$$

und

$$(\alpha\nu)^+ = -\alpha\nu^-\,, \quad (\alpha\nu)^- = -\alpha\nu^+ \quad \text{für } \alpha < 0$$

gilt. Deshalb gilt in jedem Fall $\|\alpha\nu\|_v = |\alpha|\|\nu\|_v$.

Um die Dreiecksungleichung zu zeigen, brauchen wir die alternative Darstellung

$$\|\nu\|_v = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\nu(A_j)| \colon n \in \mathbb{N},\, A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} \text{ disjunkt und } \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega\right\}.$$

Falls man das positive Mass $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ definiert, dann zeigen wir allgemeiner, dass für jede Menge $E \in \mathcal{A}$

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)| \colon n \in \mathbb{N},\, E_1, ..., E_n \in \mathcal{A} \text{ disjunkt und } \bigcup_{j=1}^{n} E_j = E \right\}$$

gilt.

Offenbar gilt nämlich

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)| &= \sum_{j=1}^{n} |\nu^+(E_j) - \nu^-(E_j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \Big(|\nu^+(E_j)| + |\nu^-(E_j)| \Big) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\nu^+(E_j) + \nu^-(E_j) \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} |\nu|(E_j) = |\nu|(E)\,, \end{aligned}$$

und somit $\sup\{\cdots\} \leq |\nu|(E)$.

Falls wir andererseits $E_1 := \Omega^+ \cap E$ und $E_2 := \Omega^- \cap E$ setzen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E) &= \nu(\Omega^+ \cap E) - \nu(\Omega^- \cap E) \\ &= \nu(E_1) - \nu(E_2) = |\nu(E_1)| + |\nu(E_2)| \end{aligned}$$

und somit $|\nu|(E) \leq \sup\{\cdots\}$.

Seien nun $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$. Mit Hilfe der vorherigen Formel erhält man

$$\begin{aligned} \|\nu_1 + \nu_2\|_v &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |(\nu_1 + \nu_2)(A_j)| \colon \cdots \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} (|\nu_1(A_j)| + |\nu_2(A_j)|) \colon \cdots \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\nu_1(A_j)| \colon \cdots \right\} + \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\nu_2(A_j)| \colon \cdots \right\} \\ &= \|\nu_1\|_v + \|\nu_2\|_v\,. \end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|_v$ eine Norm.