11.1.

(a) T ist linear. $\|\cdot\|_X$ ist ein norm (ähnlich L^∞). Sei $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$. Wir haben, dass $\|f_n\|_X \to 0$. Aber
$$T(f_n) = \frac{n^2}{n}$$
und dann
$$T(f_n) \to \infty \neq T(0) = 0.$$
Somit T ist nicht stetig.

(b) T ist nicht linear. $\|\cdot\|_p$ ist ein norm, und dann wir haben $|\|f\|_p - \|g\|_p| \leq \|f-g\|_p$. Wir fixieren $f_0 \in L^p, \varepsilon > 0$, und sei $\delta := \varepsilon > 0$. Für alle $f \in L^p$ mit $\|f - f_0\|_p < \delta$:
$$|T(f) - T(f_0)| = |\|f\|_p - \|f_0\|_p| \leq \|f - f_0\|_p < \delta = \varepsilon.$$
Somit T ist stetig.

(c) T ist linear, und
$$\|T\| = \sup_{\|f\|_p=1} \|T(f)\|_p = \sup_{\|f\|_p=1} \left(\int_0^1 x^p |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \sup_{\|f\|_p=1} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = 1.$$
Mit Satz II.7.1 T ist stetig. Wir bewiesen dass $\|T\| = 1$. Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $f_\varepsilon = \varepsilon^{-1/p} I_{[1-\varepsilon,1]}$. Wir haben $\|f_\varepsilon\|_p = \left(\int_{1-\varepsilon}^1 \varepsilon^{-1} dx\right)^{1/p} = 1$. Ausserdem,
$$\|T(f_\varepsilon)\|_p = \left(\int_{1-\varepsilon}^1 x^p \varepsilon^{-1} dx\right)^{1/p} = \left(\frac{1-(1-\varepsilon)^{p+1}}{\varepsilon(p+1)}\right)^{1/p}.$$
Bemerken Sie dass $(1-\varepsilon)^{p+1} = 1 - (p+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$. Somit
$$\|T(f_\varepsilon)\|_p = 1 + O(\varepsilon^{1/p}).$$
Wir schliessen dass
$$\|T\| \geq \|T(f_\varepsilon)\|_p = 1 + O(\varepsilon^{1/p})$$
d.h. $\|T\| \geq 1$, und wir haben $\|T\| = 1$.

11.2. Schritte 1. Wir annehmen, dass μ endlich ist. Sei $g_n \in \mathcal{E}_+$ mit $g_n \nearrow |g|$, und $f_n = g_n^{q-1}\text{sign}g$. Dann $f_n \in \overline{\mathcal{L}}^p$ (μ ist endlich) und
$$\left|\int g_n^q d\mu\right| = \left|\int g_n f_n \text{sign} g d\mu\right| \leq \left|\int g f_n d\mu\right| \leq C\|f_n\|_{L^p}.$$

Aber
$$\|f_n\|_{L^p} = \left(\int g_n^{(q-1)p} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Weil $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wir haben $p = \frac{q}{q-1}$ und dann
$$\|f_n\|_{L^p} = \|g_n\|_{L^q}^{q-1}.$$
Somit
$$\|g_n\|_{L^q}^q \leq C\|g_n\|_{L^q}^{q-1}$$
d.h.
$$\|g_n\|_{L^q} \leq C.$$
Mit Satz II.3.1
$$\|g\|_{L^q} = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{L^q} \leq C.$$
Wir schliessen dass $g \in \overline{\mathcal{L}}^q$.

Schritte 2. Falls μ σ-endlich, sei $\Omega_k \nearrow \Omega$ und $\mu(\Omega_k) < \infty$. Mit Schritte 1, $g_k := gI_{\Omega_k} \in \overline{\mathcal{L}}^q$ und $\|g_k\|_{L^q} \leq C$. Mit Satz II.3.1
$$\|g\|_{L^q} = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_{L^q} \leq C.$$

11.3.

(a) $L^p \cap L^q$ ist ein Linearraum weil L^p und L^q sind. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$ ist eine Norm auf $L^p \cap L^q$, weil $\|\cdot\|_q$ und $\|\cdot\|_p$ sind.

Sei eine Cauchy Folge $(f_n) \in L^p \cap L^q$. Wir müssen zeigen, dass eine Funktion $f \in L^p \cap L^q$ existiert mit $\|f_n - f\| \to 0$. Wir haben
$$\|f_m - f_n\| = \|f_m - f_n\|_p + \|f_m - f_n\|_q$$
für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann
$$\|f_m - f_n\|_p \leq \|f_m - f_n\|$$
und
$$\|f_m - f_n\|_q \leq \|f_m - f_n\|$$

Somit, weil f_n Cauchy in $L^p \cap L^q$ ist, dann f_n ist Cauchy in L^p und in L^q. Nach dem Satz 4.11 (Fischer-Riesz) existiert $f_p \in L^p$ und $f_q \in L^q$ mit $\|f_n - f_p\|_p \to 0$ und $\|f_n - f_q\|_q \to 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest, dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f_n - f_p\|_p^p < \varepsilon^{p+1}$$

für alle $n \geq N$. Sei $h(x) = x^p$. Nach dem Satz 3.7 (Markov Ungleichung), wir haben

$$\mu\{|f_n - f_p| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f_p|^p d\mu < \frac{1}{\varepsilon^p} \varepsilon^{p+1} = \varepsilon.$$

Somit $f_n \to f_p$ μ-stochastisch. Mit Satz 3.10, existiert eine Teilfolge $f_{n_k} \to f_p$ μ-f.ü.

Fall $q < \infty$. Ähnlich wie oben, $f_n \to f_q$ μ-stochastisch, und es existiert eine Teilfolge $f_{n'_k} \to f_q$ μ-f.ü.

Fall $q = \infty$. $f_n \to f_q$ μ-f.ü.

Folglich, $f_p = f_q =: f$, $f \in L^p \cap L^q$. Wir schliessen dass $L^p \cap L^q$ ist eine Banachraum.

(b) Fall $q < \infty$.

Sei $\lambda \in (0, 1)$, so dass $r = \lambda p + (1 - \lambda)q$. Wir haben

$$\|f\|_r^r = \int |f|^r d\mu = \int |f|^{\lambda p} |f|^{(1-\lambda)q} d\mu = \| |f|^{\lambda p} |f|^{(1-\lambda)q} \|_1.$$

Bemerkung Sie dass $\lambda + (1 - \lambda) = 1$, und dann mit Satz 4.2, haben wir

$$\begin{aligned} \|f\|_r^r = \| |f|^{\lambda p} |f|^{(1-\lambda)q} \|_1 &\leq \| |f|^{\lambda p} \|_{1/\lambda} \| |f|^{(1-\lambda)q} \|_{1-\lambda} \\ &= \|f\|_p^{\lambda p} \|f\|_q^{(1-\lambda)q} \end{aligned}$$

d.h.

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\lambda p/r} \|f\|_q^{(1-\lambda)q/r}.$$

Sei $\lambda' = \dfrac{\lambda p}{r} \in (0, 1)$. Es ist klar dass $(1 - \lambda)q/r = 1 - \lambda'$ weil $(1 - \lambda)q = r - \lambda p$. Wir schliessen

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\lambda'} \|f\|_q^{1-\lambda'}.$$

Somit $L^p \cap L^q \subset L^r$.

Fall $q = \infty$.

Wir schrieben $r = (r - p) + p$. $f \in L^\infty$. Somit

$$\int |f|^r d\mu = \int |f|^{r-p} |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^{r-p} \int |f|^p d\mu$$

d.h.

$$\|f\|_r^r \leq \|f\|_\infty^{r-p} \|f\|_p^p$$

und

$$\|f\|_r \leq \|f\|_\infty^{(r-p)/r} \|f\|_p^{p/r}$$

Sei $\lambda = p/r \in (0,1)$. Somit

$$\|f\|_r \leq \|f\|_\infty^{1-\lambda} \|f\|_p^{\lambda}$$

und $L^p \cap L^\infty \subset L^r$.

(c) $L^p \cap L^q$ ist eine Banachraum und ι ist eine lineare Abbildung. Wir müssen zeigen, dass $\|\iota\| < \infty$.

Sei $f \in L^p \cap L^q$ mit $\|f\| = 1$. Somit $\|f\|_p \leq 1$ und $\|f\|_q \leq 1$. Mit **(b)**

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_q^{1-\lambda} \leq 1^\lambda 1^{1-\lambda} = 1.$$

Aber

$$\|\iota\| = \sup_{\|f\|=1} \|f\|_r$$

und dann

$$\|\iota\| \leq 1.$$

Mit Satz II.7.1, wir haben dass ι ist stetig.

11.4. Wir fixieren beliebiges $c > 0$. Dann

$$\{Y \leq c\} = \left\{ \inf_{r\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} X_r \leq c \right\} = \bigcup_{r\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{X_r \leq c\}.$$

X_r ist $\mathcal{F}_t$ messbar und mit Satz II.1.9, $\{X_r \leq c\} \in \mathcal{F}_t$.

$[0,t] \cap \mathbb{Q}$ ist abzählbar, dann $\bigcup_{r\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{X_r \leq c\} \in \mathcal{F}_t$. Mit Satz II.1.9 Y ist messbar.

Wir können bestimmen $\mathbb{R}^{[0,\infty)} = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R}\}$ und dann $X_u(f) = f(u)$, $u \geq 0$.

Somit

$$Z(f) := \sup_{r\in[0,t]} f(r).$$

Wir fixieren $c > 0$.

$\{Z(f) < c\} = \bigcap_{r\in[0,t]} \{X_r < c\} = \bigcap_{r\in[0,t]} \{f\colon f(r) < c\} = \{f\colon f(x) < c \ \forall x \in [0,t]\}$.

Somit $Z(f)$ ist $\mathcal{F}_t$-messbar wenn $\{f\colon f(x) < c \ \forall x \in [0,t]\}$ ist $\mathcal{F}_t$-messbar.

Ausserdem, mit Satz 1.11, existiert $I \subset [0,t]$ abzählbar, so dass wenn Z messbar ist, dann ist $\{Z(f) < c\} \in \sigma(X_s; s \in I)$. Sei $X_I : \mathbb{R}^{[0,t]} \to \mathbb{R}^I$. Mit Satz II.1.18, Z ist $\sigma(X_s; s \in I)$-messbar wenn existiert $g : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ messbar und

$$Z = g \circ X_I$$

d.h.

$$\{f : f(x) < c \ \forall x \in [0,t]\} = \{f : g \circ X_I(f) \leq c\}.$$

Sei $t \in I^c$ und $f : [0,t] \to \mathbb{R}$, $f(t) > c$, und $g \circ X_I(f) \leq c$. Somit $f \in \{f : g \circ X_I(f) \leq c\}$, aber $f \notin \{f : f(x) < c \ \forall x \in [0,t]\}$.

Wir schliessen, dass Z ist nicht $\mathcal{F}_t$ messbar.