12.1.

(a) Sei $\tau_{\mathbb{R}}$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ und $\tau_{\mathbb{R}^2}$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{E} := \{B(x,r) : x \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}_+\} \ ,$$

wobei wir mit der Notation $B(x,r)$ die offene Kugel mit Zentrum x und Radius r meinen. Dann kann man jede offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung von Elementen von $\mathcal{E}$ schreiben. Somit erhält man $\tau_{\mathbb{R}} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, also $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.

Weil offenbar $\mathcal{E} \subseteq \tau_{\mathbb{R}}$ gilt, folgt $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und damit, dass

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$$

gilt, d.h. $\mathcal{E}$ ist ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ferner gilt $\mathcal{E} \ni B(0,n) \nearrow \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ und, wenn wir

$$\mathcal{M} := \{E_1 \times E_2 : E_1, E_2 \in \mathcal{E}\}$$

setzen, dann erhalten wir nach Proposition III.1.5, dass

$$\sigma(\mathcal{M}) = \sigma\left(\{E_1 \times E_2 : E_1, E_2 \in \mathcal{E}\}\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ist.

Wir bemerken, dass $\mathcal{M} \subseteq \tau_{\mathbb{R}^2}$ ist; also ist $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Ausserdem kann jede offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^2$ als abzählbare Vereinigung von Elementen von $\mathcal{M}$ geschrieben werden. Deshalb erhalten wir $\tau_{\mathbb{R}^2} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$, also auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$.

Wir schliessen

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,.$$

(b) Weil offenbar $\Omega_{\omega_1} = \Omega_2$ ist, folgt aus Eigenshaft 2.4, dass $\omega_1 \mapsto K(\omega_1, \Omega_{\omega_1})$ $\mathcal{A}_1$-messbar ist, d.h. $\Omega \in \mathcal{D}$.

Seien nun $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subseteq B$. Dann sind nach Voraussetzung die Funktionen

$$\omega_1 \mapsto K(\omega_1, A_{\omega_1})$$

$$\omega_1 \mapsto K(\omega_1, B_{\omega_1})$$

$\mathcal{A}_1$-messbar.

Wir fixieren $\omega_1 \in \Omega_1$ und beobachten die Identität $(B \setminus A)_{\omega_1} = B_{\omega_1} \setminus A_{\omega_1}$. Da $K(\omega_1, \cdot)$ ein endliches Mass und $A_{\omega_1} \subseteq B_{\omega_1}$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} K(\omega_1, (B \setminus A)_{\omega_1}) &= K(\omega_1, B_{\omega_1} \setminus A_{\omega_1}) \\ &= K(\omega_1, B_{\omega_1}) - K(\omega_1, A_{\omega_1})\,. \end{aligned}$$

Weil ω_1 beliebig ist, folgt, dass die obige Identität für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ gilt. Da die rechte Seite $\mathcal{A}_1$-messbar ist, schliessen wir, dass auch die linke Seite $\mathcal{A}_1$-messbar und $B \setminus A \in \mathcal{D}$ ist.

Seien schliesslich $A_1, A_2, ... \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt. Wie oben gilt nach Voraussetzung, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\omega_1 \mapsto K(\omega_1, (A_i)_{\omega_1})$$

$\mathcal{A}_1$-messbar sind. Ausserdem gilt für ein fixiertes ω_1

$$\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)_{\omega_1} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i)_{\omega_1}\,.$$

Deshalb erhalten wir mit σ-Additivät von $K(\omega_1, \cdot)$

$$\begin{aligned} K\left(\omega_1, \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)_{\omega_1}\right) &= K\left(\omega_1, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i)_{\omega_1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} K(\omega_1, (A_i)_{\omega_1}) \end{aligned}$$

und wir sehen, dass $\omega_1 \mapsto K\left(\omega_1, (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)_{\omega_1}\right)$ $\mathcal{A}_1$-messbar ist, d.h. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$.

Also ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System.

12.2. Wir bemerken, dass $f \geq 0$ und stetig auf $I^3 \setminus \{(x, y, z) : y = z\}$ ist. Ferner gehört die Menge $\{f = \infty\}$ zu $\mathcal{B}(I^3)$. Somit folgt, dass f $\mathcal{B}(I^3)$-messbar ist. Schliesslich wissen wir, dass $\mathcal{B}(I^3) = \mathcal{B}(I) \times \mathcal{B}(I^2)$ gilt (Aufgabe 1).

Der Satz von Fubini liefert deshalb

$$\int_{I^3} f(x, y, z)\, dxdydz = \int_I \left(\int_{I^2} f(x, y, z)\, dydz\right) dx\,.$$

Für jedes $x \in I$ ist die Funktion $(y, z) \mapsto f(x, y, z)$ $\mathcal{B}(I^2)$-messbar. Daher folgt noch einmal nach dem Satz von Fubini, dass

$$\int_{I^2} f(x, y, z)\, dydz = \int_I \left(\int_I f(x, y, z)\, dy\right) dz$$

gilt. Sei $z \in I$ fixiert. Offenbar hat die Menge $\{y : y = z\}$ Lebesguemass Null. Daher erhalten wir für jedes $x \in I$

$$\begin{aligned}\int_I f(x,y,z)\,dy &= \int_{I\setminus\{z\}} \frac{1}{\sqrt{|y-z|}}\,dy \\ &= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{-y+z}}\,dy + \int_z^1 \frac{1}{\sqrt{y-z}}\,dy \\ &= 2\sqrt{z} + 2\sqrt{1-z}\,.\end{aligned}$$

Deshalb folgt für jedes $x \in I$

$$\int_{I^2} f(x,y,z)\,dydz = \int_I (2\sqrt{z} + 2\sqrt{1-z})\,dz = \frac{8}{3}$$

und

$$\int_{I^3} |f(x,y,z)|\,dxdydz = \int_{I^3} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_I \frac{8}{3}\,dx = \frac{8}{3}\,,$$

d.h. f ist in $L^1(\lambda^3)$.

Sei jetzt $z \in I$ und $Y(z) := \{y \in I : \int_I f(x,y,z)\,dx = \infty\}$. Wir behaupten, dass $Y(z) = \{z\}$ ist.

Offenbar gilt $z \in Y(z)$, weil man für $y = z$ erhält, dass $f(x,y,z) = \infty$ für alle $x \in I$ ist, und somit gilt $\int_I f(x,y,z)\,dx = \infty$.

Ist andererseits $y \neq z$, dann gilt $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{|y-z|}}$ für alle $x \in I$. Deshalb sehen wir, dass

$$\int_I f(x,y,z)\,dx = \int_I \frac{1}{\sqrt{|y-z|}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{|y-z|}} < \infty$$

gilt, d.h. $y \notin Y(z)$.

12.3.

(a) Sei $X_i\colon \Omega \to \Omega_i$, $i \in I$ die Koordinatenabbildung. Wir zeigen dass, wenn $X_i \circ X_I$ ist messbar für alle $i \in I$, dann X_I messbar ist.

$X_i \circ X_I\colon \Omega \to \Omega_i$, und $X_i \circ X_I(\omega) = X_i\left(\omega\big|_I\right) = \omega_i = X_i(\omega)$, $i \in I$. Somit $X_i \circ X_I = X_i$, und dann $X_i \circ X_I$ messbar ist.

Wir müssen zeigen, dass $X_I^{-1}(\mathcal{A}_I) \subseteq \mathcal{A}$. Wir haben $(X_i \circ X_I)^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq (A)$ d.h. $X_I^{-1} \circ X_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{A}$ für alle $i \in I$. Somit $X_I^{-1}(\cup_{i\in I} X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)) \subseteq \mathcal{A}$. Sei $\mathcal{N} = \cup_{i\in I} X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$.

Es bleibt zu beweisen, dass $X_I^{-1}(\sigma(\mathcal{N})) \subseteq \sigma(X_I^{-1}(\mathcal{N}))$. Es ist klar, dass $X_I^{-1}(\mathcal{N}) \subseteq \sigma(X_I^{-1}(\mathcal{N}))$. Sei $\mathcal{C} := \{A \in 2^N | X_I^{-1}(A) \in \sigma(X_I^{-1}(\mathcal{N}))\}$. Man kann überprüfen, dass

$\mathcal{C}$ ein σ-Algebra ist und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$, $X_I^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(X_I^{-1}(\mathcal{N}))$. Ausserdem, ist $\sigma(\mathcal{N})$ der kleinste σ-Algebra, der $\mathcal{N}$ enthält, und damit folgt $X_I^{-1}(\sigma(\mathcal{N})) \subseteq \sigma(X_I^{-1}(\mathcal{N}))$.

Und dann $X_I^{-1}(\sigma(\cup_{i\in I} X_i^{-1}(\mathcal{A}_i))) \subseteq \sigma(X_I^{-1}(\cup_{i\in I} X_i^{-1}(\mathcal{A}_i))) \subseteq \mathcal{A}$ d.h. $X_I^{-1}(\mathcal{A}_I) \subseteq \mathcal{A}$.

(b) Sei $A_1, A_2 \in \mathcal{Z}$. Wir haben $A_i = X_{J_i}^{-1}(B_i)$ für $B_i \in \mathcal{A}_{J_i}$. Sei $B_1' = B_1 \times \Omega_{J_2\setminus J_1}$ und $B_2' = B_2 \times \Omega_{J_1\setminus J_2}$. Dann gilt $X_{J_1\cup J_2}^{-1}(B_i') = A_i$.

Somit $A_1 \cup A_2 = X_{J_1\cup J_2}^{-1}(B_1' \cup B_2') \in \mathcal{Z}$.

Es genügt zu beweisen, dass $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Wir haben

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(X_{J_1\cup J_2}^{-1}(B_1' \cup B_2')) = \mu(X_{J_1\cup J_2}^{-1}(B_1') \cup X_{J_1\cup J_2}^{-1}(B_2')) \\ &= \mu(X_{J_1\cup J_2}^{-1}(B_1')) + \mu(X_{J_1\cup J_2}^{-1}(B_2')) = \mu(A_1) + \mu(A_2)\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichheit wir haben der Konsistenzbedingung (3.2) benutzen.

(c) Sei $\mathcal{G}' = \bigcup_{I\subseteq\Lambda,\, I \text{ abzählbar}} \sigma(f_i; i \in I)$. In der Vorlesung, wir haben das $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ beweisen.

Es genügt zu bewisen dass $\mathcal{G}'$ ein σ-algebra ist.

Sei $\{A_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{G}'$, wobei J ist abzählbar. Wir haben $A_j \in \sigma(f_i; i \in I_j)$. Sei $I = \cup_{j\in J} I_j$, und dann I abzählbar ist. Somit $\sigma(f_i; i \in I) \subseteq \mathcal{G}'$.

Aber, $\cup_{j\in J} A_j \in \sigma(f_i; i \in I)$. Somit, $\cup_{j\in J} A_j \in \mathcal{G}'$.

$\emptyset \in \mathcal{G}'$. Es ist klar dass wenn $A \in \mathcal{G}'$, dann $A^c \in \mathcal{G}'$.

Wir schliessen dass $\mathcal{G}'$ ein σ-Algebra ist.

12.4.

(a) Schritt 1. Es ist klar, dass $(\lambda \times \nu)^*(\emptyset) = 0$.

Schritt 2. Sei $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \times F_n \supseteq C_2$, $E_n, F_n \in \mathcal{B}([0,1])$ mit

$$(\lambda \times \nu)^*(C_2) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)\nu(F_n).$$

Aber dann gilt auch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \times F_n \supseteq C_2 \supseteq C_1$$

und damit
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)\nu(F_n) \geq (\lambda \times \nu)^*(C_1).$$
Weil $\varepsilon > 0$ ist beliebig, haben wir
$$(\lambda \times \nu)^*(C_2) \geq (\lambda \times \nu)^*(C_1).$$

Schritt 3. Seien Mengen C_n in $2^{\Omega_1 \times \Omega_2}$. Wir müssen beweisen, dass
$$(\lambda \times \nu)^* \left(\bigcup C_i\right) \leq \sum_i (\lambda \times \nu)^*(C_i).$$

Wir fixieren $\varepsilon > 0$.

Für alle $i \geq 0$ existiert eine Folge $(A_i^j \times B_i^j)$, so dass $\bigcup_j A_i^j \times B_i^j \supseteq C_i$, wobei $A_i^j, B_i^j \in \mathcal{B}([0,1])$ und
$$(\lambda \times \nu)^*(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \geq \sum_j \lambda(A_i^j)\nu(B_i^j).$$

Somit folgt
$$\sum_i (\lambda \times \nu)^*(C_i) + \varepsilon \geq \sum_i \sum_j \lambda(A_i^j)\nu(B_i^j).$$
Ausserdem ist wegen $\bigcup_j A_i^j \times B_i^j \supseteq C_i$, auch $\bigcup_i \bigcup_j A_i^j \times B_i^j \supseteq \bigcup_i C_i$ und damit
$$\sum_i (\lambda \times \nu)^*(C_i) + \varepsilon \geq \sum_i \sum_j \lambda(A_i^j)\nu(B_i^j) \geq (\lambda \times \nu)^* \left(\bigcup_i C_i\right).$$

Wir schliessenm dass
$$(\lambda \times \nu)^* \left(\bigcup C_i\right) \leq \sum_i (\lambda \times \nu)^*(C_i)$$

und damit ist $(\lambda \times \nu)^*$ ist ein äusseres Mass.

(b) Sei $A_1 \subset \Omega_1$, $A_2 \subset \Omega_2$. Es genügt zu beweisen, dass $(\lambda \times \nu)^*(A_1 \times A_2) \geq \lambda(A_1)\nu(A_2)$.

Bemerkung: Für $\lambda(A_1) = 0$, ist das Resultat klar (wenn $0 \cdot \infty = 0$).

Sonst ist $\lambda(A_1) \neq 0$ wir haben zwei Fälle.

Fall 1 $\nu(A_2) < \infty$ oder $(\nu(A_2) = \infty$ und A_2 ist abzählbar).

Wegen A_2 höchstens abzählbar , habe wir $A_2 = \{p_1, ..., p_{\nu(A_2)}\}$. Sei $\varepsilon > 0$; dann existieren Mengen $(E_i \times F_i)$, so dass $\bigcup E_i \times F_i \supseteq A_1 \times A_2$ und

$$(\lambda \times \nu)^*(A_1 \times A_2) + \varepsilon \geq \sum_i \lambda(E_i)\nu(F_i).$$

Wenn ein i_0 existiert, so dass $\nu(F_{i_0}) = \infty$, dann ist $(\lambda \times \nu)^*(A_1 \times A_2) = \infty \geq \lambda(A_1)\nu(A_2)$.

Sonst ist $\nu(F_i) < \infty$ für alle $i \leq \nu(A_2)$, $F_i = \{p_1^j, \dots, p_{n_i}^j\}$. O.B.d.A und umnummerieren, $\mu(F_j^i) = 1$, $F_j^i = \{p_j^i\}$, $\bigcup_{j=1}^{n_i} F_j^i = F_i$. Dann gilt $\bigcup E_i \times F_i = \bigcup_i (E_i \times \bigcup_j F_j^i) = \bigcup_i \bigcup_j E_i \times F_j^i$. Wir haben:

$$\bigcup A_1 \times \{p_i\} \subseteq \bigcup_{i,j} E_i \times \{p_j^i\}.$$

Und dann

$$\sum_{i,j} \lambda(E_i)\nu(F_j^i) = \sum_j \sum_i \lambda(E_i) \geq \sum_j \lambda(A_1) = \lambda(A_1)\nu(A_2).$$

Somit

$$(\lambda \times \nu)^*(A_1 \times A_2) + \varepsilon \geq \lambda(A_1)\nu(A_2)$$

für alle $\varepsilon > 0$, d.h.

$$(\lambda \times \nu)^*(A_1 \times A_2) \geq \lambda(A_1)\nu(A_2).$$

Fall 2 $\nu(A_2) = \infty$ und A_2 ist überabzählbar.

Sei beliebiges Mengen F_i, $\sum_{i=1}^{\infty} F_i \supseteq A_2$. Weil A_2 ist überabzählbar, dann existiert i_0 so dass F_{i_0} ist überabzählbar d.h. $\nu(F_{i_0}) = \infty$.

Somit $\lambda(A_1)\nu(A_2) = \infty$ und $(\lambda \times \nu)^*(A_1 \times A_2) = \infty$.

(c) Sei $y \in [0,1]$ fest. Dann ist $I_D(x,y) = I_{\{y\}}(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Wir haben

$$\int I_D(x,y)\lambda(dx) = \lambda(\{y\}) = 0.$$

Somit folgt

$$\int \int I_D(x,y)\lambda(dx)\nu(dy) = \int 0 d\nu = 0.$$

Jetzt sei $x \in [0,1]$ fest. Dann ist $I_D(x,y) = I_{\{x\}}(y)$ für alle $x \in [0,1]$. Wir haben

$$\int I_D(x,y)\nu(dy) = \nu(\{x\}) = 1.$$

Somit

$$\int \int I_D(x,y)\nu(dy)\lambda(dx) = \int 1 d\lambda = \lambda([0,1]) = 1.$$

Bemerkunen Sie, dass $\int\int I_D d(\lambda \times \nu) = (\lambda \times \nu)(D)$.

Sei $(A_n \times B_n)$ eine Folge von Rechtecken mit $\biguplus A_n \times B_n \supseteq D$. Sei $x_0 \in [0,1]$ beliebig. Dann ist $(x_0, x_0) \in A_{n_0} \times B_{n_0}$, und $x_0 \in A_{n_0} \cap B_{n_0}$ und wir haben $\biguplus A_n \cap B_n \supseteq [0,1]$. Somit existiert n, so dass $\lambda(A_n \cap B_n) > 0$, d.h. $\lambda(A_n) > 0$ und $\nu(B_n) = \infty$.

Wir schliessen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)\nu(B_n) = \infty$$

und

$$\lambda \times \nu(D) = (\lambda \times \nu)^*(D) = \inf\{\infty\} = \infty.$$