14.1. Für jede nicht leere Teilmenge A von $\{1,...,n\}$ setzen wir

$$E_A := \bigcap_{i\in A} E_i\,, \quad E'_A := E_A \setminus \bigcup_{i\notin A} E_i\,.$$

Die Mengen E'_A sind paarweise disjunkt und offenbar gilt

$$E_A = \bigcup_{B\supset A} E'_B\,,$$

$$E_1 \cup \cdots \cup E_n = \bigcup_B E'_B$$

und

$$(-1)^p \sigma_p = \sum_{\sharp(A)=p} (-1)^{\sharp(A)}\, m(E_A)\,.$$

Deshalb gilt

$$\sum_{p=1}^n (-1)^p \sigma_p = \sum_A (-1)^{\sharp(A)}\, m(E_A) = \sum_A (-1)^{\sharp(A)} \sum_{B\supset A} m(E'_B)$$
$$= \sum_B m(E'_B) \sum_{A\subset B} (-1)^{\sharp(A)}\,.$$

Wir bemerken, dass, falls $p = \sharp(B)$, gilt

$$\sum_{A\subset B} (-1)^{\sharp(A)} = \sum_{r=1}^p (-1)^r \binom{p}{r} = -1$$

und somit

$$\sum_{p=1}^n (-1)^p \sigma_p = -\sum_B m(E'_B) = -m(E_1 \cup \cdots \cup E_n)\,.$$

Andere Lösung: Wir benutzen Induktion. Sei $\sigma_p^n := \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p\\ i_1,\ldots,i_p\le n}} m(E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_p})$ und $\mathcal{I}(n) := \{m(E_1 \cup \ldots \cup E_n = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \sigma_p^n$ für alle $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{R}\}$.

Schritt 1. Wir beweisen $\mathcal{I}(1)$.

Dann $m(E_1) = \sigma_1^1 = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \sigma_1^1$.

Schritt 2. Wir nehmen $\mathcal{I}(1), \ldots, \mathcal{I}(n)$ an, und beweisen wir $\mathcal{I}(n+1)$.

Sei $E_1, \ldots, E_{n+1} \in \mathcal{R}$, $E'_i := E_i$ für alle $i \le n-1$ und $E'_n := E_n \cup E_{n+1}$. Mit die Induktionsannahme,

$$m(E_1 \cup \ldots E_{n+1}) = m(E'_1 \cup \ldots \cup E'_n) = \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \sigma_p^n.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
\sigma_p^n &= \sum_{i_1<\ldots<i_p\le n-1} m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_p}) + \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}<n} m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{p-1}}\cap(E_n\cup E_{n+1}))\\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_p\le n-1} m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_p})+\\
&+ \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}<n} m((E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{p-1}}\cap E_n)\cup(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{p-1}}\cap E_{n+1}))
\end{aligned}$$

Mit $\mathcal{I}(2)$, $m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$. Somit

$$\begin{aligned}
\sigma_p^n &= \sum_{i_1<\ldots<i_p\le n-1} m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_p})+\\
&+ \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}<n} m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{p-1}}\cap E_n)+m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{p-1}}\cap E_{n+1})-\\
&- \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}<n} m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{p-1}}\cap E_n\cap E_{n+1})
\end{aligned}$$

Sei

$$I_p^1 = \sum_{i_1<\ldots<i_p\le n-1} m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_p}),$$

$$I_p^2 = \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}<n} m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{p-1}}\cap E_n)+m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{p-1}}\cap E_{n+1})$$

und

$$I_p^3 = \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}<n} m(E_{i_1}\cap\ldots\cap E_{i_{p-1}}\cap E_n\cap E_{n+1}).$$

Dann gilt $\sigma_p^n = I_p^1+I_p^2-I_p^3$. Bemerken Sie dass $\sigma_p^{n+1}=I_p^1+I_p^2+I_{p-1}^3$ für $2\le p\le n$, und

$$\begin{aligned}
m(E_1\cup\ldots E_{n+1}) &= \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\sigma_p^n = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}I_p^1+I_p^2+\sum_{p=2}^{n+1}(-1)^{p-1}I_p^3\\
&= I_1^1+I_1^2+\sum_{p=2}^{n}(-1)^{p-1}I_p^1+I_p^2+I_p^3+(-1)^nI_{n+1}^3\\
&= \sigma_1^{n+1}+\sum_{p=2}^{n}(-1)^{p-1}\sigma_p^{n+1}+(-1)^n\sigma_{n+1}^{n+1}\\
&= \sum_{p=1}^{n+1}(-1)^{p-1}\sigma_p^{n+1}.
\end{aligned}$$

14.2.

Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist.

1. $\Omega^c = \varnothing$ ist abzählbar. Daher ist $\Omega \in \mathcal{B}$.
2. Ist $A \in \mathcal{B}$, so ist entweder A oder A^c abzählbar. Dann gilt aber dasselbe für A^c, und somit ist $A^c \in \mathcal{B}$.
3. Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$.
   - Sind alle A_i abzählbar, so ist es auch die abzählbare Vereinigung.
   - Ist stattdessen ein A_k^c abzählbar, so gilt nach de Morgan
   $$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c \subseteq A_k^c\,,$$
   das abzählbar ist. Daher ist $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c$ abzählbar und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$.

Wir zeigen, dass μ ein Mass auf $\mathcal{B}$ ist.

1. $\mu(\varnothing) = 0$, da die leere Menge abzählbar ist, und $\mu(\Omega) = 1$, da Ω überabzählbar ist.
2. Sei $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, eine disjunkte Vereinigung, $A_k \in \mathcal{B}$. Falls alle A_k abzählbar sind, so ist es auch A. Dann ist $\mu(A) = 0 = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$. Ist ein A_l überabzählbar (also $\mu(A_l) = 1$), so ist A_l^c abzählbar. Da alle A_k disjunkt sind, ist $A_k \subseteq A_l^c$ für alle anderen $k \neq l$, d.h. alle übrigen A_k müssen abzählbar sein, also $\mu(A_k) = 0$ für $k \neq l$. Daher ist $\mu(A) = 1 = \mu(A_l) + \sum_{k\neq l} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$.

Also ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathcal{B}$.

14.3.

Wir definieren für alle $t \in (0,\infty)$ und $n \in \mathbb{Z}$
$$\alpha_n(t) := I_{[\frac{1}{2},1)}(2^{-n-1}t - [2^{-n-1}t])\,,$$
wobei $z \mapsto [z]$ die Abrundungsfunktion ist. Dann gilt für alle $t \in (0,\infty)$
$$t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \alpha_n(t)\,.$$
(Die $\alpha_n(t)$ sind die Ziffern der Binärdarstellung von t, und wir bemerken, dass für $t < 2^n$ gilt $\alpha_n(t) = 0$.)

Besonders gilt für alle $x \in \Omega$
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \alpha_n\big(f(x)\big)\,.$$

Dann setzen wir

$$A_n := \{x \in \Omega : \alpha_n(f(x)) = 1\}$$

und bemerken, dass die Mengen A_n in $\mathcal{A}$ sind, da die Abbildung $\alpha_n \circ f$ messbar ist.

Offenbar gilt

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n I_{A_n}(x) ,$$

und wegen der Monotonie des Integrals erhalten wir, weil $f(x) \geq 2^n$ auf A_n ist,

$$\mu(A_n) = 2^{-n}\, 2^n \mu(A_n) \leq 2^{-n} \int_\Omega f \, d\mu < \infty .$$

14.4.

(a)

- $\mathcal{H}^d(\varnothing) = 0$.
- Sei $A \subseteq B \subseteq X$. Wir fixieren $\varepsilon > 0$. Seien $\delta > 0$ und $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ mit $diam(B_j) < \delta$, $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, so dass

  $$\mathcal{H}^d_\delta(B) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^\infty diam(B_j)^d.$$

  Ausserdem gilt $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \supset A$, und dann

  $$\mathcal{H}^d_\delta(B) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^\infty diam(B_j)^d \geq \mathcal{H}^d_\delta(A).$$

  Für $\varepsilon \to 0$ haben wir

  $$\mathcal{H}^d_\delta(B) \geq \mathcal{H}^d_\delta(A).$$

  Somit

  $$\mathcal{H}^d(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^d_\delta(B) \geq \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^d_\delta(A) = \mathcal{H}^d(A).$$

- Sei $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$. Wir fixieren $\varepsilon > 0$. Sei $\delta > 0$ und $\{B^i_j\}_{j=1}^\infty$ mit $diam(B^i_j) < \delta$, $A_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^i_j$, so dass

  $$\mathcal{H}^d_\delta(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \geq \sum_{j=1}^\infty diam(B^i_j)^d.$$

Somit
$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^d(A_i) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} diam(B_j^i)^d.$$
Aber,
$$\bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_j^i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$
Somit
$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^d(A_i) + \varepsilon \geq \mathcal{H}_\delta^d\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$
Für $\varepsilon \to 0$, haben wir
$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^d(A_i) \geq \mathcal{H}_\delta^d\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$
Somit
$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^d(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_\delta^d(A_i) \geq \sup_{\delta>0}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^d(A_i)\right) \geq \sup_{\delta>0} \mathcal{H}_\delta^d\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathcal{H}^d\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Sei $A \subseteq X$, $0 < \delta_1 < \delta_2$ und $S_A(\delta) := \{\{U_i\} : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset A,\ diam(U_i) < \delta\}$. Es ist klar dass $S_A(\delta_1) \subseteq S_A(\delta_2)$. Dann gilt
$$\mathcal{H}_{\delta_1}^d(A) = \inf_{\{U_i\}\in S_A(\delta_1)} \left\{\sum_{i=1}^{\infty} diam(U_i)^d\right\} \geq \inf_{\{U_i\}\in S_A(\delta_2)} \left\{\sum_{i=1}^{\infty} diam(U_i)^d\right\} = \mathcal{H}_{\delta_2}^d(A).$$
Wir schliessen, dass $\mathcal{H}_\delta^d$ ist monoton und
$$\mathcal{H}^d(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}_\delta^d(A).$$

(b) Sei $\delta > 0$ beliebig und Mengen $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit $diam(B_j) = r_j \leq \delta$, so dass $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ und
$$\sum_{j=1}^{\infty} r_j^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1.$$
Wir schätzen nun $\mathcal{H}^t(A)$ mit derselben Mengen ab $\{B_j\}$:
$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\delta^t(A) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} r_j^t = \sum_{j=1}^{\infty} r_j^s r_j^{t-s} \\ &\leq \delta^{t-s}(\mathcal{H}^s(A) + 1).\end{aligned}$$
Für $\delta \to 0$ schliessen wir $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

(c) Wir nehmen an, dass $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Aber, mit **(b)**, wir haben dass $\mathcal{H}^t(A) = 0$. Widerspruch!

14.5.

(a) Wir behaupten:

$$K \subseteq (\Omega, d) \text{ kompakt } \Leftrightarrow K = \bigcup_{j=1}^{n} \{x_j\} \times K_j$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und für $x_j \in \mathbb{Z}, K_j \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $j \in \{1, ..., n\}$.

In der Tat gilt, dass eine Menge K von der Form $K = \bigcup_{j=1}^{n} \{x_j\} \times K_j$ kompakt bzgl. d ist. Falls andererseits K kompakt bzgl. d ist, dann hat jede Folge $((x_i, y_i))_{i \in \mathbb{N}}$ in K eine konvergente Teilfolge in K bzgl. d. Somit $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n = x_m$, $\forall n, m \geq n_0$ (aufgrund der Definition von d). Dann ist nämlich

$$\forall n, m \geq n_0 : d((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = |y_n - y_m|$$

und $(y_i)_{i \geq n_0}$ müssen in einer kompakten Menge von $\mathbb{R}$ sein.

Also hat jeder Punkt $(x, y) \in \Omega$ durch

$$\{x\} \times [y - \varepsilon, y + \varepsilon], \quad \varepsilon > 0$$

eine kompakte Umgebung und damit ist Ω lokalkompakt.

Wir betrachten jetzt für $m \in \mathbb{Z}$ und $\ell \in \mathbb{N}$ die kompakten Mengen $\{m\} \times [-\ell, \ell]$. Offenbar gilt

$$\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}} \{m\} \times [-\ell, \ell],$$

d.h. Ω ist σ-kompakt.

(b) Wie in Beweis von **a)** gesehen, sind die kompakten Mengen K in Ω von der Form

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} \{x_j\} \times K_j$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und für $x_j \in \mathbb{Z}, K_j \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $j \in \{1, ..., n\}$. Also ist

$$S_f := \bigcup_{j=1}^{n} \{x_j\}$$

die gesuchte endliche Menge (mit $f(x_j, y) \neq 0$ für ein $y \in \mathbb{R}$ und $j = 1, ..., n$).

(c) Wegen **b)** und der Struktur der komp. Mengen in Ω sehen wir, dass J wohldefiniert auf $\mathcal{K}(\Omega)$ ist. Ferner ist J positiv und linear auf $\mathcal{K}(\Omega)$. Nach Satz 2.7 erhält man die Existenz eines eindeutigen Masses μ auf $\mathcal{B}_0(\Omega) = \mathcal{B}(\Omega)$ mit $\mu(K) < \infty$ für jedes kompakte K.

Sei $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ und sei $\varepsilon > 0$. Sei $\beta : \mathbb{R} \to [0,1]$ stetig mit kompaktem Träger und so, dass $\beta(y_0) = 1$ und $supp \beta \subseteq [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \beta(y) & \text{falls } x = x_0\,, \\ 0 & \text{falls } x \neq x_0\,. \end{cases}$$

Dann ist $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ und $Jf \leq 2\varepsilon$. Ausserdem gilt $I_{\{z_0\}} \leq f$. Daher erhält man

$$\mu(\{z_0\}) = \int I_{\{z_0\}}\, d\mu \leq \int f\, d\mu = Jf \leq 2\varepsilon$$

und somit ist $\mu(\{z_0\}) = 0$, weil ε beliebig war.