3.1.

(a) Sei $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$. Falls $\mu(B) = 0$, sind wir fertig. Also können wir annehmen, dass $\mu(B) > 0$. Da A ein Atom ist, folgt daraus $\mu(A \setminus B) = 0$. Dann ist nach Additivität von μ

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B) = \mu(B)\,. \tag{1}$$

(b) Sei wieder $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$. Ist $\mu(B) = 0$, sind wir fertig. Also sei $\mu(B) = \mu(A)$. Dann folgt aber aus Gleichung (1) und $\mu(A), \mu(B) < \infty$, dass $\mu(A \setminus B) = 0$.

(c) Da μ σ-endlich ist, können wir eine disjunkte Zerlegung $\cup_{k=1}^{\infty} S_k = \Omega$ aus messbaren Mengen $S_k \in \mathcal{A}$ mit endlichem Mass, $\mu(S_k) < \infty$ für alle k, finden. Wir definieren die Schnitte $A_k := S_k \cap A$. Diese sind ebenfalls disjunkt und

$$0 < \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,.$$

Daher existiert ein Index k, so dass $\mu(A_k) > 0$. Aber $A_k \subseteq A$ und nach Teil **a)** ist $\mu(A) = \mu(A_k) \leq \mu(S_k) < \infty$.

3.2. Seien $\mathcal{F}$ der minimale Ring $\mathcal{R}\{(x, y] \cap \mathbb{Q} :\ x, y \in \mathbb{Q}\}$ und μ das Zählmass auf $\mathcal{F}$. Wir haben, dass $\mu(A) = \infty$ für alle $A \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Ausserdem $\sigma(\mathcal{F}) = 2^{\mathbb{Q}}$. Seien $r > 0$ und μ_r das σ-endliches Mass auf $2^{\mathbb{Q}}$ definiert durch $\mu_r(\{q\}) = r$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Sei $A \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, dann ist $\mu(A) = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_r(\{q_i\}) = \mu_r(A) = \infty$, wobei $A = \{q_1, q_2, ...\}$. Somit ist μ_r eine Erweiterung von μ. Aber $r > 0$ ist beliebig und damit ist μ_r nicht eindeutig.

3.3.

(a) Es gilt

$$\mu^*\Big|_B(\emptyset) = \mu^*(\emptyset \cap B) = \mu^*(\emptyset) = 0\,.$$

Seien $A_k,\ k \in \mathbb{N}$, Mengen in Ω und $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Dann ist

$$A \cap B = (\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B = \cup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)$$

und

$$\mu^*\Big|_B(A) = \mu^*(A \cap B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\Big|_B(A_k)\,.$$

Also ist $\mu^*\Big|_B$ ein äusseres Mass auf Ω.

(b) Zunächst ist $\nu(\emptyset) = \sum_{i=1}^N b_i \, \mu^*\big|_{B_i}(\emptyset) = 0$. Für die zweite Eigenschaft eines Masses nehmen wir eine disjunkte Zerlegung $\cup_{k=1}^\infty A_k = A$ einer μ^*-messbaren Menge A in μ^*-messbare Mengen A_k. Wir müssen zeigen, dass

$$\nu(A) = \sum_{k=1}^\infty \nu(A_k)\,. \tag{2}$$

Da alle Mengen μ^*-messbar sind, insbesondere auch B_i, und A disjunkt zerlegt, ist

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^N b_i \, \mu^*\big|_{B_i}(A) = \sum_{i=1}^N b_i \sum_{k=1}^\infty \mu^*\big|_{B_i}(A_k)\,.$$

Falls $\nu(A) < \infty$, so ist der Ausdruck auf der rechten Seite eine absolut konvergente Summe. Nach dem grossen Umordnungssatz können wir die Summation vertauschen und erhalten

$$\sum_{i=1}^N b_i \sum_{k=1}^\infty \mu^*\big|_{B_i}(A_k) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^N b_i \, \mu^*\big|_{B_i}(A_k) = \sum_{k=1}^\infty \nu(A_k)\,.$$

Ist hingegen $\nu(A) = \infty$, so muss auch die rechte Seite von (2) unendlich sein. Wäre sie es nicht, könnten wir wieder umordnen und erhielten, dass alle $\mu^*\big|_{B_i}(A)$ endlich wären und somit auch $\nu(A)$.

Damit gilt Gleichung (2) und ν ist ein Mass.

3.4.

(a) Sei $C \subseteq \Omega$. Wir fixieren $\varepsilon > 0$. Es existiert $B \in \mathcal{A}$ so dass $C \subseteq B$ mit

$$\mu(B) \leq \mu^*(C) + \varepsilon.$$

Wir haben, $B \cap A \in \mathcal{A}$ mit $C \cap A \subseteq B \cap A$, und $B \cap A^c \in \mathcal{A}$ mit $C \cap A^c \subseteq B \cap A^c$. Es folgt dass

$$\mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) = \mu(B)$$

weil μ ein Mass ist. Somit

$$\mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \leq \mu^*(C) + \varepsilon.$$

Aber $\varepsilon > 0$ ist beliebig und damit

$$\mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \leq \mu^*(C).$$

(b) Dass ist einfach. Durch die Annahme, wir haben

$$\mu_*(E) = \mu(\Omega) - \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{A},\ E^c \subseteq A\}$$

und dann

$$\mu_*(E) = \mu(\Omega) + \sup\{-\mu(A) : A \in \mathcal{A},\ E^c \subseteq A\}.$$

D.h.

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(A^c) : A \in \mathcal{A},\ E^c \subseteq A\}$$

Das ist äquivalent mit

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A},\ A \subseteq E\}$$

(c) Falls $E \subseteq \Omega$ μ^*-messbar ist, so gilt

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),\ \text{für alle } A \subseteq \Omega.$$

Für $A = \Omega$ gibt dass

$$\mu^*(\Omega) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c),$$

d.h. $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Sei umgekehrt $\mu_*(E) = \mu^*(E)$ existiert.

`Behauptung:` Wenn ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu^*(A \setminus E) = 0$ und $E \subseteq A$, dann ist E μ^*-messbar.

Sei $B \subseteq \Omega$. Wir haben

$$\mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \cap E^c) \le \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) + \mu^*(B \cap (A \setminus E)).$$

Nach Annahme ist $\mu^*(B \cap (A \setminus E)) \le \mu^*(A \setminus E) = 0$ und damit

$$\mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \cap E^c) \le \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \le \mu^*(B).$$

weil $A \in \mathcal{A}$ nach Teil **(a)** μ^*-messbar ist. Somit ist E μ^*-messbar.

Jetzt sei $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n} > 0$. Nach Definition von μ^* und sup existieren $E \subseteq A_n$ $E^c \subseteq B_n$ mit

$$\mu(A_n) = \mu^*(A_n) \le \mu^*(E) + \frac{1}{n} \text{ und } \mu(B_n) = \mu^*(B_n) \le \mu^*(E^c) + \frac{1}{n}.$$

Sei $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$; dann gilt

$$\mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A \cap E^c) \le \mu(A_n \cap B_n) = \mu(A_n) - \mu(A_n \setminus B_n).$$

Wegen $E \subseteq A_n$ und $E^c \subseteq B_n$ ist $B_n^c \subseteq E \subseteq A_n$, also $A_n \setminus B_n = B_n^c$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A_n) - \mu^*(\Omega) + \mu^*(B_n) &\leq \mu^*(E) + \mu^*(E^c) + \frac{2}{n} - \mu^*(\Omega) \\ &= \mu^*(E) - \mu_*(E) + \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Aber $\mu_*(E) = \mu^*(E)$ folgt somit $\mu^*(A \setminus E) = 0$, und deshalb ist E μ^*-messbar.