4.1. Der Klarheit halber sei λ das Lebesgue-Prämass, $\tilde{\lambda}$ das Lebesgue-Mass und $\tilde{\lambda}^*$ das zugehörige äussere Mass. Dann müssen wir $\tilde{\lambda}(O \setminus E) \leq \varepsilon$ zeigen.

Falls $\tilde{\lambda}(E) < \infty$:

$\tilde{\lambda}(E) = \tilde{\lambda}^*(E) = \inf\{\tilde{\lambda}(C) \colon C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ E \subseteq C\}$. Sei $\varepsilon > 0$ und dann existiert $C \supseteq E$ mit

$$\tilde{\lambda}(E) + \varepsilon > \tilde{\lambda}(C).$$

Ausserdem $\tilde{\lambda}(C) = \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) : (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in U(C)\}$, wobei $U(C)$ wie in der Vorlesung Satz 3.3 definiert ist. Damit existiert eine Folge (A_k) mit

$$\tilde{\lambda}(C) + \varepsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Aber $A_k = (a_k, b_k]$, und damit ist klar, dass eine offene Menge $O_k \supseteq A_k$, $k \geq 1$, existiert mit

$$\lambda(A_k) \geq \tilde{\lambda}(O_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Sei $O = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} O_k$; dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(E) + 2\varepsilon > \tilde{\lambda}(C) + \varepsilon &> \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}(O_k) + \varepsilon \\ &\geq \tilde{\lambda}(O) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Wegen ist $E \subseteq C \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq O$ schliessen wir, dass

$$\varepsilon \geq \tilde{\lambda}(O) - \tilde{\lambda}(E) = \tilde{\lambda}(O \setminus E).$$

Falls $\tilde{\lambda}(E) = \infty$:

Sei $E_n = E \cap (n-1, n]$, $n \in \mathbb{Z}$. E_n sind paarwiese disjunkte Lebesgue-messbare Mengen mit

$$\biguplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n = E,\ \tilde{\lambda}(E_n) \leq \tilde{\lambda}((n-1, n]) = 1.$$

Wir fixieren ein beliebig es $\varepsilon > 0$; dann existiert eine offene Menge O_n mit

$$O_n \supset E_n,\ \tilde{\lambda}(O_n \setminus E_n) \leq \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{|n|}}.$$

Sei $O = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} O_n$; dann ist

$$O \setminus E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (O_n \setminus E_n).$$

Wir schliessen, dass

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}(O \setminus E) &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\lambda}(O_n \setminus E_n)\\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

4.2.

(a) Mit dem Mittelwertsatz, haben wir, für alle $x, y \in (a, b)$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Ausserdem ist

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)^+,\ E \subseteq \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}}(a_k, b_k]\right\}.$$

Beachten Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k|.$$

Wir fixieren $\varepsilon > 0$; es existiert $\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k] \supseteq E$ mit

$$\lambda^*(E) + \frac{\varepsilon}{M} \geq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k|.$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq M\lambda^*(E) + \varepsilon$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \geq \lambda^*(f(E)).$$

Weil ε beliebig ist, schliessen wir, dass

$$\lambda^*(f(E)) \leq M\lambda^*(E).$$

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$f(x) = \tilde{\lambda}(E \cap (-\infty, x]),\ x \in \mathbb{R}.$$

`Behauptung:` f ist Lipschitz-stetig.

Sei $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$. Wir haben

$$f(x) - f(y) = \tilde{\lambda}(E \cap (-\infty, x]) - \tilde{\lambda}(E \cap (-\infty, y]) \leq \tilde{\lambda}((y, x]) = x - y.$$

Ähnlich für $x \leq y$. Somit ist f Lipschitz-stetig.

Ausserdem gilt

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lambda(E) = 1.$$

Somit f ist eine stetig und surjektive Funktion. Das bedeutet, dass $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = \frac{1}{2}$. Sei $A = E \cap (-\infty, x_0] \subset E$. Wir haben, dass

$$f(x_0) = \tilde{\lambda}(A) = \frac{1}{2}.$$

4.3. Wir zeigen, dass das Komplement

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} : \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\varepsilon}{q^\alpha} \right\}$$

eine Nullmenge ist. Es gilt

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap [-n, n]$$

und

$$A \cap [-n, n] = [-n, n] \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}} B_{\frac{q^{-\alpha}}{k}} \left(\frac{p}{q} \right) \right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E^n_{1/k}\,,$$

wobei

$$E^n_{1/k} := [-n, n] \cap \bigcup_{p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}} B_{\frac{q^{-\alpha}}{k}} \left(\frac{p}{q} \right)$$

ist. Es ist

$$\lambda(E^n_{1/k}) \leq \sum_{q \in \mathbb{N}} \sum_{p=-nq}^{nq} \frac{2q^{-\alpha}}{k} = \sum_{q \in \mathbb{N}} (2nq + 1) \frac{2q^{-\alpha}}{k} \leq \frac{2(2n+1)}{k} \sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{q^{\alpha - 1}}$$

und daher gilt $\lambda(E^n_{1/k}) \leq \frac{2(2n+1)}{k} C(\alpha)$. Hier benutzen wir $\alpha > 2$, weil daraus $C(\alpha) = \sum_{q\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{q^{\alpha-1}} < \infty$ folgt.

Deshalb ist $E^n = \cap_{k\in\mathbb{N}} E^n_{1/k}$ wegen Stetigkeit von oben für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge. Daher folgt

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E^n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E^n) = 0\,.$$

4.4. Nach Satz 2.9 gilt auch

$$\mathcal{R} := \{\text{alle endlichen } \textbf{disjunkten} \text{ Vereinigungen von } (a,b] \text{ mit } a,b\in\mathbb{R},\ a\leq b\}\ .$$

Ausserdem ist aus der Vorlesung bekannt, dass μ endlich additiv auf $\mathcal{R}$ ist.

Wir müssen überprüfen, dass μ auch σ-additiv ist. Sei $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge von disjunkten Elementen von $\mathcal{R}$ mit $\biguplus_{k=1}^\infty \Lambda_k \in \mathcal{R}$. Weil jedes Λ_k durch endliche disjunkte Intervalle gebildet wird, können wir die Folge $\{\Lambda_k\}_{k=1}^\infty$ als $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ schreiben, wobei I_j einzelne Intervalle mit $I_j \cap I_h = \emptyset$ für $j \neq h$ sind. Offenbar gilt $\biguplus_{j=1}^\infty I_j = \biguplus_{k=1}^\infty \Lambda_k \in \mathcal{R}$ und deshalb ist $\biguplus_{j=1}^\infty I_j$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen, d.h. $\biguplus_{j=1}^\infty I_j = \biguplus_{i=1}^{M} (a_i, b_i]$.

Somit können wir eine endliche Unterteilung $\{H_1, ..., H_M\}$ der Folge $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ machen, so dass die Vereinigung der Intervallen in jeder Teilfolge H_ℓ, $\ell = 1, ..., M$, ein Intervall $(a_\ell, b_\ell]$ ist. Wenn wir jede Teilfolge separat betrachten und Additivität von μ benutzen, können wir o.E.d.A. annehmen, dass

$$\biguplus_{k=1}^{\infty} \Lambda_k = \biguplus_{j=1}^{\infty} I_j = (a,b] =: I$$

mit $I_j \cap I_h = \emptyset$ für $j \neq h$ ist. In diesem Fall erhalten wir sofort

$$\mu(I) = \mu\left(\biguplus_{j=1}^{n} I_j\right) + \mu\left(I \setminus \biguplus_{j=1}^{n} I_j\right) \geq \mu\left(\biguplus_{j=1}^{n} I_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu\left(I_j\right)\ .$$

Für $n \to \infty$ gilt $\mu(I) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu\left(I_j\right)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da F rechtsstetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $F(a+\delta) - F(a) < \varepsilon$, und falls $I_j = (a_j, b_j]$ ist, existiert für alle j ein $\delta_j > 0$ mit $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \varepsilon\, 2^{-j}$. Die offenen Intervalle $(a_j, b_j + \delta_j)$ sind eine Überdeckung von $[a+\delta, b]$, und daher erhalten wir (mit einer eventuellen Umordnung) eine endliche Überdeckung mit

- $[a+\delta, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{N}(a_j, b_j+\delta_j)$
- $b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1}+\delta_{j+1})$ für $j = 1, ..., N-1$.

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\mu(I) &< F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \leq F(b_N+\delta_N) - F(a_1) + \varepsilon \\
&= F(b_N+\delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1}(F(a_{j+1}) - F(a_j)) + \varepsilon \\
&\leq F(b_N+\delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1}(F(b_j+\delta_j) - F(a_j)) + \varepsilon \\
&< \sum_{j=1}^{N}(F(b_j) + \varepsilon\, 2^{-j} - F(a_j)) + \varepsilon < \sum_{j=1}^{\infty}\mu(I_j) + 2\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Weil ε beliebig war, folgt $\mu(I) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu(I_j)$. Weil schliesslich die Summe $\sum_{j=1}^{\infty}\mu(I_j)$ absolut konvergent ist, folgt

$$\mu(I) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu(I_j) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(\Lambda_k)\ .$$