

13.1. Beweisen Sie die folgende Gleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Fubini und die Identität

$$\int_0^t e^{-ux} \sin x dx = \frac{1}{1+u^2} [1 - e^{-ut}(u \sin t + \cos t)], \quad u > 0.$$

13.2. Sei $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $T : L^q(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$, so dass

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy \text{ für alle } f \in L^q(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass $\|T\| < \infty$, wenn $K(x, y) \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda(dx) \times \lambda(dy))$.

13.3.

(a) Sei \mathcal{F} ein Stone-Vektorverband und $J : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

Ist J eine Linearform und positiv, so ist J monoton.

(b) Sei $\Lambda \neq \emptyset$ und seien $(\Omega_\lambda, \mathcal{A}_\lambda, \mu_\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$ σ -endliche Massräume. Für $J \subseteq \Lambda$ endlich sei $\Omega_J := \prod_{j \in J} \Omega_j$, $\mathcal{A}_J := \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j$ und μ_J das entsprechende Produktmass auf \mathcal{A}_J . Zeigen Sie:

Falls die Familie aller μ_J konsistent ist, so sind alle μ_λ Wahrscheinlichkeitsmasse.

13.4. Wie im Satz von Daniell-Stone sei \mathcal{F} ein Stone-Vektorverband auf $\Omega \neq \emptyset$ und J eine σ -stetige positive Linearform auf \mathcal{F} . Ferner sei \mathcal{F}_+^* die Menge aller $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit $f_n \nearrow f$ für eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{F}_+ und $J^* : \mathcal{F}_+^* \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch $J^*(f) := \sup_{n \in \mathbb{N}} J(f_n)$. Zeigen Sie: Ist $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{F}_+^* mit $h_n \nearrow h \in \mathcal{F}_+^*$, so gilt

$$J^*(h_n) \nearrow J^*(h).$$

Abgabetermin:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Dienstag, 30.05.2017.

Allgemeine Informationen sind unter:

<http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-2284-00L/>