14.1. Sei $\mathcal{R} \subset 2^\Omega$ ein Ring und m ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Seien $E_1, E_2, ..., E_n \in \mathcal{R}$ mit $m(E_i) < \infty$, $i = 1, ..., n$. Für $1 \le p \le n$ und $i_1, ..., i_p \in \{1, ..., n\}$ setzen Sie

$$\sigma_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} m(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_p}) .$$

Zeigen Sie die Inklusions-Exklusions-Formel

$$m(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \sigma_p .$$

14.2.

Sei Ω eine überabzählbare Menge,

$$\mathcal{B} := \{E \subseteq \Omega : E \text{ abzählbar oder } E^c \text{ abzählbar}\} .$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist und dass $\mu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ mit

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{falls } E \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathcal{B}$ ist.

14.3. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f : \Omega \to [0, \infty)$ messbar mit $\int_\Omega f \, d\mu < \infty$. Zeigen Sie, dass Mengen $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}$, mit $\mu(A_n) < \infty$ existieren, so dass für alle $x \in \Omega$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n I_{A_n}(x)$$

gilt.

14.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $U \subseteq X$. Dann setzen wir

$$diam(U) := \sup\{d(x, y) \colon x, y \in X\}$$

und

$$\mathcal{H}^d_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} diam(U_i)^d \colon diam(U_i) < \delta, \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset A \right\},$$

wobei $A \subseteq X$. Wir definieren das **Haussdorff-Mass**

$$\mathcal{H}^d(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^d_\delta(A).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathcal{H}^d$ ist ein äusseres Mass und $\mathcal{H}^d_\delta$ ist monoton in δ.

(b) Falls $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, dann $\mathcal{H}^t(A) = 0$, $0 \le s < t \le \infty$.

(c) Falls $\mathcal{H}^t(A) > 0$, dann $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$, $0 \le s < t \le \infty$.

Bemerkung: Dies impliziert, dass es einen eindeutigen Wert $d \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathcal{H}^s(A) = 0$ für $s > d$ und $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$ für $s < d$. Dieser Wert d wird auch die **Hausdorff-Dimension** von A genannt.

14.5. Betrachten Sie $\Omega := \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ mit der Metrik $d : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ definiert als

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{falls } x_1 = x_2\,, \\ 1 + |y_1 - y_2| & \text{falls } x_1 \neq x_2\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass (Ω, d) lokalkompakt und σ-kompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass zu jeder Funktion $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ eine endliche Menge $S_f \subseteq \mathbb{Z}$ mit $supp f \subseteq S_f \times \mathbb{R}$ existiert.

(c) Sei $J : \mathcal{K}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$Jf := \sum_{x \in S_f} \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, \lambda(dy)\,.$$

Sei μ das Borelmass auf (Ω, d), so dass

$$Jf = \int f\, d\mu, \quad f \in \mathcal{K}(\Omega)\,.$$

Zeigen Sie, dass jede einpunktige Teilmenge von Ω μ-Mass 0 hat.

Abgabetermin:
Keine.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-2284-00L/`