3.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heisst *μ-Atom*, falls sie $\mu(A) > 0$ erfüllt und für jede Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$ gilt $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A \setminus B) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Sei A ein μ-Atom und $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$. Dann gilt entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A) = \mu(B)$.

(b) Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$. Ferner gelte für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$ entweder $\mu(B) = 0$ oder $\mu(A) = \mu(B)$. Dann ist A ein μ-Atom.

(c) Falls μ zusätzlich σ-endlich und $A \in \mathcal{A}$ ein μ-Atom ist, dann gilt $\mu(A) < \infty$.

3.2. Sei μ ein Prämass auf einem Ring $\mathcal{R} \subseteq 2^\Omega$, und $\tilde{\mu}$ ein Mass auf der erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{R})$ mit $\tilde{\mu} = \mu$ auf $\mathcal{R}$. Zeigen Sie, dass wenn μ nicht σ-endlich ist, dann ist $\tilde{\mu}$ nicht unbedingt eindeutig.

3.3. Sei Ω eine Menge und $\mu^* : 2^\Omega \to [0, \infty]$ ein äusseres Mass auf Ω. Es bezeichne $\mathcal{A}^*$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Teilmengen von Ω.

(a) Sei zudem $B \subseteq \Omega$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren eine Mengenfunktion $\mu^*\big|_B : 2^\Omega \to [0, \infty]$ durch

$$\mu^*\big|_B(A) := \mu^*(A \cap B)$$

für alle $A \subseteq \Omega$.

Zeigen Sie: $\mu^*\big|_B$ ist ein äusseres Mass.

(b) Seien $B_i \in \mathcal{A}^*$ μ^*-messbare Mengen, $b_i > 0$ für $i \in \{1, ..., N\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\nu : \mathcal{A}^* \to [0, \infty]$, gegeben durch

$$\nu(A) := \sum_{i=1}^{N} b_i \, \mu^*\big|_{B_i}(A) \,,$$

ein Mass auf $\mathcal{A}^*$ definiert.

3.4. Sei μ ein Mass auf einer σ-algebra $\mathcal{A}$ und μ^* das zugehörige äussere Mass.

(a) Zeigen Sie, dass jedes $A \in \mathcal{A}$ μ^*-messbar ist.

Sei nun μ endlich und $\mu_* \colon 2^\Omega \to [0, \infty)$ definiert durch $\mu_*(E) := \mu(\Omega) - \mu^*(E^c)$. Zeigen Sie:

(b) $\mu_*(E) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A},\ A \subseteq E\}$.

(c) $E \subseteq \Omega$ ist genau dann μ^*-messbar, wenn gilt $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Tipp: Zeigen Sie falls ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu^*(A \setminus E) = 0$ und $E \subseteq A$, dann ist E μ^*-messbar.

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Dienstag, 14.03.2017.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-2284-00L/`