4.1. Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Menge. Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $O \supseteq E$ mit $\lambda(O \setminus E) \leq \varepsilon$.

4.2. Seien λ das Lebesgue-Prämass, λ^* das im Beweis von Satz 3.3 konstruierte äussere Mass und $\tilde{\lambda}$ das Lebesguemass.

(a) Seien $M \geq 0$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ so, dass die Ableitung f' existiert und für alle $x \in (a,b)$: $|f'(x)| \leq M$. Zeigen Sie, dass für alle $E \subseteq (a,b)$ gilt

$$\lambda^*(f(E)) \leq M\lambda^*(E).$$

(b) Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Menge mit $\tilde{\lambda}(E) = 1$. Zeigen Sie, dass $A \subset E$ existiert mit $\tilde{\lambda}(A) = \frac{1}{2}$.

4.3. Diophantische Approximation: Sei $\alpha > 2$. Beweisen Sie den folgenden Satz:

Für fast alle $x \in \mathbb{R}$ (d.h. für alle x im Komplement einer Lebesgue-Nullmenge) existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ gilt

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{|q|^\alpha}\,.$$

4.4. Wir betrachten den Ring

$$\mathcal{R} := \{\text{alle endlichen Vereinigungen von } (a,b] \text{ mit } a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}$$

und eine wachsende RCLL Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Falls $\{(a_j, b_j]\}_{j=1}^n$ disjunkte Intervalle sind, definieren wir

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]\right) := \sum_{j=1}^n \left(F(b_j) - F(a_j)\right)$$

und $\mu(\emptyset) = 0$. Zeigen Sie ohne Benutzung von Satz 2.13 oder Proposition 2.16, dass μ ein Prämass auf $\mathcal{R}$ ist.

`Bemerkung`: Für $F(x) = x$ folgt mit Satz 3.3 insbesondere die Existenz des Lebesguemasses auf $\mathbb{R}$. Ist F eine Verteilungsfunktion mit $F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, so liefert Satz 3.3 die Existenz einer Zufallsvariablen X mit Verteilungsfunktion F (nämlich $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$, $P = \tilde{\mu}$ = Fortsetzung von μ aus Satz 4.1., und $X(\omega) = \omega$).

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Dienstag, 21.03.2017.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-2284-00L/`