5.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$A := \{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\} \ .$$

Zeigen Sie, dass $f(A)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

5.2.

(a) Seien $F \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge und $f \colon F \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein stetiges $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in F$.

Hinweis: Jede offene Menge in $\mathbb{R}$ lässt sich als abzählbare disjunkte Vereinigung von paarweise disjunkten Intervallen schreiben.

(b) Finden Sie eine stetige monotone Funktion $f \colon [0,1] \to [0,1]$, so dass $|f'(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0,1] \setminus A$, $\lambda(A) = 0$, aber f nicht eine Lipschitz-Funktion ist.

5.3. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$eine Folge von messbaren Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{R}$, und $f \colon D \to \mathbb{R}$ messbar mit

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \ \forall x \in D.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\lambda\{x \in D : \ f(x) > \alpha\} \leq \liminf_{n \to \infty} \lambda\{x \in D : \ f_n(x) > \alpha\}$

(b) $\lambda\{x \in D : \ f(x) < \alpha\} \leq \liminf_{n \to \infty} \lambda\{x \in D : \ f_n(x) \leq \alpha\}$

(c) Gilt **(a)** immer noch, wenn wir beide $>$ durch $\geq$ ersetzen?

5.4. Seien μ ein Borelmass auf $\mathbb{R}^n$ (d.h. ein Mass auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$) und $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Die Funktion $F : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genüge der Carathéodory-Bedingung, d.h.

i) $F(\cdot, u) : G \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar für alle $u \in \mathbb{R}$,

ii) $F(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig für μ-fast alle $x \in G$, d.h.

$$\{x \in G : u \mapsto F(x,u) \text{ ist nicht stetig}\} \subseteq N$$

für eine Menge $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(N) = 0$.

Sei weiter $u : G \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Zeigen Sie, dass

$$f(x) := F(x, u(x))$$

μ-fast messbar ist, d.h. es gibt eine Borel-messbare Funktion $\tilde{f}$ mit $\{f \neq \tilde{f}\} \subseteq \tilde{N}$ für ein $\tilde{N} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(\tilde{N}) = 0$. (Insbesondere: Falls μ vollständig ist, so ist $\{f \neq \tilde{f}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und damit f Borel-messbar.)

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Dienstag, 28.03.2017.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-2284-00L/`