6.1. Sei $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, $f \in \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$ und

$$\left| \int f d\mu \right| = \int |f| d\mu.$$

Dann ist μ-fast überall auf Ω entweder $f \geq 0$ oder $f \leq 0$.

6.2.

(a) Beweisen Sie Lemma 2.13.

Für $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar sind äquivalent:

1) $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$.

2) $f^+, f^- \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$.

3) $|f| \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$.

4) $\exists\, h_1, h_2 \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ *mit* $f^+ \leq h_1$, $f^- \leq h_2$.

5) $\exists\, g \in \overline{\mathcal{L}}^1(\mu)$ *mit* $|f| \leq g$.

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger messbarer Raum, $x \in \Omega$ und $\mu = \delta_x$ das Diracmass in x. Zeigen Sie:

$$\overline{\mathcal{L}}^1(\delta_x) = \{f : \Omega \to [-\infty, \infty] : f \text{ ist } \mathcal{A} - \text{messbar und } |f(x)| < \infty\}$$

und

$$\int f \, d\delta_x = f(x)$$

für $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\delta_x)$.

6.3.

(a) Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass der Satz über monotone Konvergenz mit dem Riemann-Integral nicht gilt.

(b) Geben Sie ein Beispiel für beschränkte messbare Funktionen $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\int_{(0,1)} f_n(x) d\lambda = 1, \ n \geq 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \text{ für alle } x \in (0,1).$$

6.4. Seien $f \in \mathcal{E}_+^*$ und $\nu(E) = \int_E f d\mu$, $E \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) ν ist ein Mass.

(b) Für alle $g \in \mathcal{E}_+^*$ gilt $\int g d\nu = \int f g d\mu$.

(c) Für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) = 0$ gilt $\nu(E) = 0$ (d.h. ν ist absolutstetig bezüglich μ).

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Dienstag, 04.04.2017.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-2284-00L/`