7.1. Seien $f_n : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar.

(a) Zeigen Sie: Gilt $f_n \geq g$ μ-f.ü. für jedes n mit $g \in \bar{\mathcal{L}}^1(\mu)$, so folgt

$$\int \left(\liminf_n f_n \right) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \,. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie: Ohne die zusätzliche Voraussetzung ist (1) im Allgemeinen falsch.

7.2. Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine *Zerlegung* σ von $[a,b]$ ist eine endliche Folge $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Wir definieren

$$M(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup \{ f(y) : y \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

und

$$m(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf \{ f(y) : y \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

und sagen, dass f Riemann-integrierbar ist, falls

$$\infty > \inf_\sigma M(\sigma) = \sup_\sigma m(\sigma) > -\infty$$

gilt. Sei λ das Lebesguemass auf $[a,b]$. Zeigen Sie: Falls f Riemann-integrierbar ist, so ist f ist Lebesgue-messbar und

$$\inf_\sigma M(\sigma) = \sup_\sigma m(\sigma) =: \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

7.3.

(a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und $f \colon X \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$ eine Funktion mit und $f(\cdot, t) : X \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $t \in [a,b]$. Nehmen Sie an, dass $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ existiert und $\left| \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x)$ für alle x und t, wobei $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu = \frac{\partial}{\partial t} \int_X f(x,t) d\mu.$$

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n d\lambda$ für

1) $f_n(x) = \dfrac{1 + nx}{(1+x)^n}$,

2) $f_n(x) = \dfrac{nx \log x}{1 + n^2 x^2}$.

7.4. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum, Y eine Menge und $\phi : \Omega \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren den *Pushforward von* $\mathcal{A}$ als die σ-Algebra

$$\phi_* \mathcal{A} := \left\{ B \subseteq Y : \phi^{-1}(B) \in \mathcal{A} \right\} \subseteq 2^Y$$

und den *Pushforward von* μ als die Abbildung $\phi_* \mu : \phi_* \mathcal{A} \to [0, \infty]$, so dass

$$\phi_* \mu(B) := \mu(\phi^{-1}(B)) \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass $(Y, \phi_* \mathcal{A}, \phi_* \mu)$ ein Massraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\phi_* \mathcal{A}$ die grösste σ-Algebra $\mathcal{Y}$ auf Y ist, für die ϕ $\mathcal{A}$-$\mathcal{Y}$-messbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass $f : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\phi_* \mathcal{A}$-messbar ist genau dann, wenn $f \circ \phi : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar ist.

(d) Sei $f : Y \to [0, \infty]$ $\phi_* \mathcal{A}$-messbar. Zeigen Sie die Transformationsformel

$$\int_\Omega f\left(\phi(\omega)\right) \, d\mu(\omega) = \int_Y f(y) \, d\phi_* \mu(y) \, . \tag{2}$$

(e) Zeigen Sie, dass (2) auch dann gilt, wenn $\mathcal{Y} \subseteq 2^Y$ eine σ-Algebra auf Y, ϕ $\mathcal{A}$-$\mathcal{Y}$-messbar und f $\mathcal{Y}$-messbar ist.

Abgabetermin:
Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens Dienstag, 11.04.2017.

Allgemeine Informationen sind unter:
`http://metaphor.ethz.ch/x/2017/fs/401-2284-00L/`